ايجاد مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس θ ولدالة المعولية R(t) لتوزيع ويبل المبتور من طرف اليسار عندما تكون معلمة الشكل معلومة

أ.د. ضوية سلمان حسن

كليه ادارة المعلوماتية / قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

م. بان غانم العاني

كلية الحاسوب والرياضيات / قسم الاحصاء والمعلوماتيه

ملخص:

تم في هذا البحث تقديرمعلمة القياس θ ودالة المعوليه R(T) لتوزيع ويبل المبتورمن جهة اليسار باسلوب بيز الحصين باستعمال التوزيع الاولي للمعلمة θ ذو الصنف (الملوث ε-ML-II) عندما تكون معلمة الشكل β معلومة وتحت دالة الخسارة DeGroot إذ كانت دالة الكثافه الاحتماليه المسبقه للتوزيع الاساس والملوث تتوزعان توزيع frechet بالمعلمات (α_0 =1, σ_0) للتوزيع الاصلي و (α=1, σ) للتوزيع الملوث

هدف البحث:

ايجاد افضل مقدر بيزي لمعلمة القياس θ لتوزيع ويبل المبتور من طرف اليسار باعتماد دوال خسارة مختلفة في ظل توزيع اولي للمعلمة θ معلوم (وهو كاما المعكوس) وتوزيع اولي مقترح جديد (هو توزيع فريجيت frechet) مع عرض جميع الاشتقاق والصيغ الضرورية لتحقيق الهدف.

المقدمة:

يتميز استدلال بيز بمعاملة المعلمة كمتغير عشوائي لها توزيع احتمالي . أي أن أسلوب بيز لا يعتمد فقط على معلومات العينة المسحوبة من المجتمع وإنما يستفيد من المعلومات المسبقة (prior information) حول معلمات المجتمع قبل أخذ المشاهدات وهذه المعلومات تتوفر لدى الباحثان. ويمكن تمثيل هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي أولي (prior distribution) . هذا التوزيع يحوي على معلومات لا بأس بها عن المعلمة θ. ويكون هذا النوع قياسيا Standard أي أن جميع الأشخاص يستخدمون صيغة توزيع المعلمة ولكن بقيم مختلفة للمعلمة . إذا كان التوزيع الأولي ينتمي إلى عائلة التوزيع الاحتمالي نفسها للتوزيع اللاحق مثل هذه العائلة تدعى بالعائلة المتآلفة Conjugate Family. بمعنى آخر إذا كان التوزيع الأولي (Closed) وله شكل دالة الامكان ولكن بمعالم مختلفة عندئذ يمكن القول بأنهم عائلة متآلفة

اسلوب بيز الحصين يفترض عدم التاكد من تحديد التوزيع المسبق π(θ) ،لذلك ظهرت اصناف عدة للتوزيعات المسبقه لمعالجة هذه المشكلة ومن ضمن هذه الاصناف التي اهتم بها الباحثون والتي تعد اكثر شيوعا هو صنف (ξ- الملوث) ξ-contamination classs الذي اعتمدنا عليه في بحثنا هذا والمعروف بالدالة الاتية[3]:

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1-\varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta), q \in Q\} \quad \ldots(1)$$

وقد تناول العديد من الباحثين هذا الصنف في دراسات متعددة منهم (Mark Berliner)[4] و (Anoop Chaturvedi&Manaswini Pati)[1] و (Pankaj Sinha&J. Prabha)[5] .

في هذا البحث سوف يتم تقدير المعلمة θ ودالة المعوليه لتوزيع ويبل تحت داله الخسارة degroot. وذلك باقتراح طريقه جديدة بتغير التوزيع المسبق لكل من التوزيع الاصلي والملوث إذ توزعان توزيع frechet بالمعلمات (α_0 =1, σ_0) للتوزيع الاصلي و (α=1, σ) للتوزيع الملوث

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل المبتور من طرف اليسار عند النقطة T ذي المعلمتين (β , θ)، بالدالة الاحتمالية الآتية:

$$\mathbf{f_T(X|\theta,\beta)} = \frac{\frac{\beta}{\theta}x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x^\beta}{\theta}\right)}{1-\left[1-\exp\left(-\frac{T^\beta}{\theta}\right)\right]}$$

$$\mathbf{f_T(X|\theta,\beta)} = \frac{\frac{\beta}{\theta}x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x^\beta}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{T^\beta}{\theta}\right)} \qquad \ldots(2)$$

إذ أن ∞ ≥X ≥T تشير β الى معلمة الشكل و θ تمثل معلمة القياس و دالة الامكان الاعظم

$$\mathbf{L}\ (X;\theta,\beta) = \frac{\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^\beta}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{T^\beta}{\theta}\right)^n} \qquad \ldots(3)$$

وبالاعتماد على الصنف (الملوث - ε) للتوزيع السابق للمعلمة θ والمعرف والمعرف بالمعادلة (1)

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1-\varepsilon)q_0(\theta) + \varepsilon\, q(\theta)\}$$

$q_0(\theta)$: المعلومات الاساسية المسبقة القياسية

$q(\theta)$:المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

إذ أن كل من $q_0(\theta)$ و $q(\theta)$ يتوزعان توزيع frechect ويعبر عنها وصفيا:

$$q_{F0}(\theta|\sigma_0) \sim \text{frechect}(\ \alpha_0 = 1,\ \sigma_0)$$

$$q_F(\theta|\sigma) \sim \text{frechect}(\ \alpha = 1, \sigma)$$

اي ان

$$\mathbf{q_{F0}(\theta|\sigma_0) = \frac{\sigma_0}{\theta^2}\exp\left(-\frac{\sigma_0}{\theta}\right)} \quad \dots (4)$$

$$\mathbf{q_F(\theta|\sigma) = \frac{\sigma}{\theta^2}\exp\left(-\frac{\sigma}{\theta}\right)} \quad \dots (5)$$

اما دالة الكثافة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي لـ x بوجودالمعلومات المسبقة الملوثة عن المعلمه θ فهي:

$$\mathbf{m_{FT}(X|q) = \int_0^\infty L(\theta|X,B)q(\theta|X)\,d\theta}$$

$$\mathbf{= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{\theta}\right) * \frac{\sigma}{\theta^2}\exp\left(-\frac{\sigma}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{T^\beta}{\theta}\right)^n}\,d\theta}$$

$$\mathbf{= \beta^n \prod x^{\beta-1}\sigma \int_0^\infty \theta^{-(n+2)}\exp\left(-\frac{(\sum x^\beta + \sigma - nT^B)}{\theta}\right)d\theta}$$

$$\mathbf{= \beta^n \prod x^{\beta-1}\sigma \int_0^\infty \theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^\beta + \sigma - nT^B}{\theta}\right)d\theta}$$

$$\mathbf{\therefore m_{FT}(X|q) = \beta^n \prod x^{\beta-1}\sigma \frac{\Gamma(n+1)}{(\sum x^\beta + \sigma - nT^B)^{n+1}}} \quad \dots (6)$$

الان نعظم الدالة الحدية $\mathbf{m_{FT}(X|q)}$ للحصول على مقدر جديد $\hat{\sigma}$

$$\mathbf{\frac{m_{FT}(X|q)}{\partial\sigma} = \beta^n \prod x^{\beta-1}\Gamma(n+1)\left[\frac{(\sum x^\beta+\sigma+nT^B)^{n+1} - \sigma(n+1)(\sum x^\beta+\sigma-nT^B)^n}{(\sum x^\beta+\sigma-nT^B)^{2(n+1)}}\right]}$$

باخراج عامل مشترك $\mathbf{(\sum x^\beta + \sigma - nT^B)^n}$ ومساواة $\mathbf{\frac{m_{FT}(X|q)}{\partial\sigma}}$ بالصفر نحصل على :

$$\mathbf{(\sum x^\beta + \sigma + nT^B)^{(n)}\left[(\sum x^\beta + \sigma nT^B) - \sigma(n+1)\right] = 0}$$

اما $\mathbf{(\sum x^\beta + \sigma + nT^B)^{(n)} = 0}$ وهذا لايجوز لان هذا المقدار اكبر من الصفر

$$\therefore\ (\sum x^{\beta} + \sigma - nT^{B}) - \sigma(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum x^{\beta} - nT^{B} = \sigma(n+1) - \sigma$$

$$\therefore \hat{\sigma} = \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} \qquad \ldots(7)$$

وعليه سوف نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في دالة التوزيع المسبق الملوث ل θ في المعادلة (5) نحصل على :

$$q_{FT}(\theta|\sigma) = \begin{cases} = \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n\theta^{2}} \exp\left(-\frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n\theta}\right) & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ = q_{FT0}(\theta|\sigma_0) & \text{if } \alpha_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \qquad \ldots(8)$$

وعليه سوف يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة θ باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كما يأتي :

$$\hat{\pi}_{FT}(\theta) = (1-\varepsilon) q_{FT0}(\theta|\sigma_0) + \varepsilon\, q_{FT}(\theta|\hat{\sigma}) \qquad \ldots(9)$$

اذن التوزيع اللاحق للمعلمة θ باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني هو

$$\hat{\pi}^{*}_{FT}(\theta) = \hat{\lambda} q^{*}_{FT0}(\theta|\sigma_0) + (1-\hat{\lambda}) q^{*}_{TF}(\theta|\hat{\sigma}) \qquad 0 < \theta < \qquad \ldots(10)$$

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني

$$\hat{\lambda}_{FT} = \frac{(1-\varepsilon) m_{FT}(X|q_0)}{(1-\varepsilon) m_{FT}(X|q_0) + \varepsilon\, m_{FT}(X|\hat{q})}$$

ويمكن كتابة $\hat{\lambda}$ بشكل اخر وكالاتي

$$\hat{\lambda}_{FT} = \left[1 + \frac{\varepsilon\, m_{FT}\big(X|\hat{q}(\theta)\big)}{(1-\varepsilon) m_{FFT}\big(X|q_0(\theta)\big)}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon\, \beta^{n} \prod x^{\beta-1} \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} \frac{\Gamma(n+1)}{\left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} + nT^{B}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\varepsilon\, \beta^{n} \prod x^{\beta-1} \sigma_0 \frac{\Gamma(n+1)}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B})^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon \, \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} \left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} + nT^{B} \right)^{-(n+1)}}{(1-\varepsilon)\, \sigma_0 (\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B})^{-(n+1)}} \right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon\left(\Sigma x^{\beta} n^{-1} - T^{B} \right) \left(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B} \right)^{n+1}}{(1-\varepsilon)\;\; \sigma_0 \left[\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{B} \right]^{n+1}} \right]^{-1}$$

$$\hat{\lambda}_{FT} = \begin{Bmatrix} \left[1 + \frac{\varepsilon\left(\Sigma x^{\beta} n^{-1} - T^{B} \right) \left(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B} \right)^{n+1}}{(1-\varepsilon)\;\; \sigma_0 \left[\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{B} \right]^{n+1}} \right]^{-1} & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ (1-\varepsilon) & \text{if } \sigma_0 \ge \hat{\sigma} \end{Bmatrix} \quad \dots (11)$$

ومن ثم يتم ايجاد التوزيع اللاحق للتوزيع الاساس $q^*_{FT0}(\theta|\sigma_0)$ للمعلمة θ

$$q^*_{FT0}(\theta|\sigma_0) = \frac{L(\theta) q_0(\theta|\sigma_0)}{m(X|q_0)}$$

$$= \frac{\dfrac{\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} x^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}{\theta} \right)}{\exp\left(-\frac{T^{\beta}}{\theta} \right)^{n}} \, \dfrac{\sigma_0}{\theta^2} \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\theta} \right)}{= \beta^{n} \prod x^{\beta-1} \sigma_0 \dfrac{\Gamma(n+1)}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B})^{n+1}}}$$

$$\therefore\; q^*_{FT0}(\theta|\sigma_0) = \frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B})^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta})}{\theta} \right) \quad \dots (12)$$

وتمثل الدالة الاحتماليه في المعادله **(12)** توزيع معكوس كاما بالمعلمتين $(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B}, n+1)$

و الطريقة نفسها يتم ايجاد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث نحصل على

$$q^*_{FT}(\theta|\hat{\sigma}) = \frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{B})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})}{\theta}\right) \quad ...(13)$$

وتمثل الدالة الاحتمالية في المعادله (13) توزيع معكوس كاما بالمعلمتين $(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{B}, n+1)$

ايجاد مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة التربيعية:

مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة التربيعية للتوزيع الاساس المبتور

$$Eq^*_{TF0}(\theta) = \int_0^{\infty}\theta\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(n+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma(n)}{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})^{n}}$$

$$\therefore\ Eq^*_{TF0}(\theta) = \frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{n}$$

و الطريقة نفسها نجد مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة التربيعية للتوزيع الملوث المبتور والذي هو :

$$E\hat{q}^*_{TF}(\theta) = \frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})}{n}$$

وعليه سيكون مقدر بيز للمعلمة θ للتوزيع اللاحق المختلط تحت دالة الخسارة التربيعية للطريقة المقترحة هو

$$E\hat{\pi}^*_{TF}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left[\hat{\lambda}(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})+(1-\hat{\lambda})(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})\right] & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \frac{1}{n}(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}) & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad ...(14)$$

دالة المعولية لتوزيع ويبل المبتور هي[2]:

$$R(t) = \exp\left(\frac{-(t^{\beta}-T^{B})}{\theta}\right)$$

اما مقدر دالة المعولية للتوزيع اللاحق المختلط المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية يمكن كتابته كما في المعادلة (15):

$$\hat{R}^*_{FT}(t) = \int_0^\infty R(t)\,\hat{\pi}^*_{FT}(\theta)d\theta \quad \dots (15)$$

ومن ثم

$$\hat{R}^*_{FT}(t) = \begin{cases} \hat{R}_{FT0} + (1-\hat{\lambda})[\hat{R}_{FT} - \hat{R}_{FT0}] & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \hat{R}_{FT0} & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad \dots (16)$$

إذ أن :

$$\hat{R}_{FT0} = Eq^*_{FT0}[R(t)] = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-(t^\beta - T^B)}{\theta}\right) q^*_{FT0}(\theta|\sigma_0)d\theta$$

وهذه تمثل مقدر دالة المعولية للتوزيع الاصلي المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية

وكذلك نجد ان مقدر دالة المعولية للتوزيع الملوث المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية بالشكل الأتي:

$$\hat{R}_{FT} = Eq^*_{FT}[R(t)] = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-(t^\beta - T^B)}{\theta}\right) q^*_{FT}(\theta|\hat{\alpha})d\theta$$

بعد ذلك يتم ايجاد $\hat{R}_{FT0}$ **و** $\hat{R}_{FT}$

$$\hat{R}_{FT0} = \int_0^\infty \frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(\frac{-(t^\beta - T^B)}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta)}{\theta}\right) d\theta$$

$$\hat{R}_{FT0} = \frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(-\frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta + t^\beta - T^B)}{\theta}\right) d\theta$$

$$\hat{R}_{FT0} = \frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta + t^\beta - T^B)^{n+1}}$$

$$\therefore \hat{R}_{FT0} = \frac{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta)^{n+1}}{(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta + t^\beta - T^B)^{n+1}} \quad \dots (17)$$

وهذا يمثل مقدر دالة المعولية للتوزيع الاصلي

و الطريقة نفسها نجد مقدر دالة المعولية للتوزيع الملوث المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية نحصل على

$$\therefore \ \widehat{\mathrm{R}}_{FT} = \frac{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}} \qquad \ldots (18)$$

وعليه يكون مقدر دالة المعولية للتوزيع اللاحق المختلط المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية والناتج عن التعويض في المعادلة (16)

$$\widehat{\mathrm{R}}^{*}{}_{\mathrm{FT}}(\mathrm{t}) = \frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}} + (1-\hat{\lambda})\left[\frac{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}} - \frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}}\right] \qquad \ldots(19)$$

حساب مقدر بيز للمعلمة θ لتوزيع ويبل المبتور تحت دالة الخسارة DeGroot للطريقة المقترحة:

نقدم فيما يأتي طريقة مقترحة لحساب مقدر بيز للمعلمة θ في ظل توزيع ويبل المبتور وتحت دالة الخسارة DeGroot وحسب الصيغة الاتية

$$\hat{\theta}_{DFT}{}^{*} = \frac{E\pi_{FT}{}^{*}(\theta^2|X)}{E\pi_{FT}{}^{*}(\theta|X)} \qquad \ldots(20)$$

مقدر بيز للمعلمة θ^2 للتوزيع الاساس المبتور هو

$$\mathrm{Eq}^{*}_{FT0}(\theta^2) = \int_0^{\infty} \theta^2 \frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(-\frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)}{\theta}\right)$$

$$= \frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \theta^{-(n-1+1)} \exp\left(-\frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)}{\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n-1}}$$

$$\therefore \ \mathrm{Eq}^{*}_{T0}(\theta^2) = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+1)} \left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{2} \qquad \ldots(21)$$

مقدر بيز للمعلمة θ^2 للتوزيع الملوث المبتور هو

$$\mathrm{Eq}_{FT}{}^{*}(\theta^2) = \int_0^{\infty} \theta^2 \frac{\left(\sum x^{\beta}+\hat{\sigma}-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(-\frac{\left(\sum x^{\beta}+\hat{\sigma}-nT^{\beta}\right)}{\theta}\right) d\theta$$

وبعد اجراء التبسيط وتعويض عن قيمة $\hat{\sigma}$ نحصل على :

$$\mathbf{Eq^*}_{FT}(\theta^2) = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left(\sum x^\beta + \frac{\sum x^\beta - nT^B}{n} - nT^\beta\right)^2 \qquad \ldots(22)$$

وعليه يكون مقدر بيز للمعلمة θ^2 للتوزيع اللاحق المختلط

$$\mathbf{E\hat{\pi}^*}(\theta^2) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left[\hat{\lambda}\left(\sum x^\beta + \alpha_0 - nT^\beta\right)^2 + \left(1-\hat{\lambda}\right)\left(\sum x^\beta + \dfrac{\sum x^\beta - nT^B}{n} - nT^\beta\right)^2\right] & \text{if } \alpha_0 < \hat{\alpha} \\ \dfrac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left(\sum x^\beta + \alpha_{0+} - nT^\beta\right)^2 & \text{if } \alpha_0 \geq \hat{\alpha} \end{cases} \qquad \ldots(23)$$

اذن توقع المعلمة θ تحت دالة الخسارة DeGroot بالاعتماد على التوزيع اللاحق المختلط لـ θ لدالة الامكان الاعظم من النوع الثاني للطريقة المقترحة وحسب المعادلة (20) هو

$$\hat{\theta}_{DFT}{}^* = \frac{E\pi_{FT}{}^*(\theta^2|X)}{E\pi_{FT}{}^*(\theta|X)} =$$

$$\frac{\hat{\lambda}[\mathbf{Eq}^*_{FT0}(\theta^2)] + (1-\hat{\lambda})[\mathbf{Eq}_{FT}{}^*(\theta^2)]}{\hat{\lambda}[\mathbf{Eq}^*_{FT0}(\theta)] + (1-\hat{\lambda})[\mathbf{Eq}_{FT}{}^*(\theta)]} \qquad \ldots(24)$$

$$\therefore \hat{\theta}_{DFT}{}^* ==$$

$$\frac{\begin{cases} \dfrac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left[\hat{\lambda}\left(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta\right)^2 + \left(1-\hat{\lambda}\right)\left(\sum x^\beta + \dfrac{\sum x^\beta - nT^B}{n} - nT^\beta\right)^2\right] & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \dfrac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta\right)^2 & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases}}{\begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\left[\hat{\lambda}\left(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta\right) + \left(1-\hat{\lambda}\right)\left(\sum x^\beta + \dfrac{\sum x^\beta - nT^B}{n} - nT^\beta\right)\right] & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \dfrac{\Gamma(n+\nu-1)}{\Gamma(n+\nu)}\left(\sum x^\beta + \sigma_0 - nT^\beta\right) & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases}} \qquad \ldots(25)$$

ايجاد مقدر بيز لدالة المعولية R(t) لتوزيع ويبل المبتور بالاعتماد على صنف(الملوث ML-II-ε) وتحت دالة الخسارة DeGroot للطريقة المقترحة:

يعرف مقدر بيز لدالة المعوليه تحت دالة الخساره Degroot كالاتي:

$$\hat{R}_{FTD} = \frac{E[R(t)^2\,\hat{\pi}^*{}_{FT}(\theta)]}{E[R(t)\,\hat{\pi}^*{}_{FT}(\theta)]} = \frac{\int_0^\infty R(t)^2\,\hat{\pi}^*{}_{FT}(\theta)d\theta}{\int_0^\infty R(t)\,\hat{\pi}^*{}_{FT}(\theta)d\theta} \qquad \ldots(26)$$

$$= \frac{\int_0^\infty \exp\left(\dfrac{-2(t^\beta - T^B)}{\theta}\right)\left[\hat{\lambda}\mathbf{q}^*_{FT0}(\theta|\sigma_0) + \left(1-\hat{\lambda}\right)\mathbf{q}^*{}_{FT}(\theta|\hat{\sigma})\right]d\theta}{\int_0^\infty \exp\left(\dfrac{-(t^\beta - T^B)}{\theta}\right)\left[\hat{\lambda}\mathbf{q}^*_{FT0}(\theta|\sigma_0) + \left(1-\hat{\lambda}\right)\mathbf{q}^*{}_{FT}(\theta|\hat{\sigma})\right]d\theta}$$

إذ يمثل المقام مقدر بيز لدالة المعولية R(t) لتوزيع ويبل المختلط المبتور بالاعتماد على صنف (الملوث-ML-II-ε) وتحت دالة الخسارة التربيعية وتم ايجاده في المعادلة (19).

سيتم ايجاد مقدر بيز لدالة المعولية $[R(t)]^2$ لتوزيع ويبل المختلط بالاعتماد على صنف (الملوث ML-II-ε):

مقدر بيز لدالة المعولية $[R(t)]^2$ لتوزيع ويبل الاساس المبتور

$$Eq^{*}_{FT0}[R(t)]^2 = \hat{R}^2{}_{FT0} = \int_0^\infty \exp\left(\frac{-2(t^\beta - T^B)}{\theta}\right) q^{*}_{FT0}(\theta|\sigma_0)d\theta$$

$$\hat{R}^2{}_{FT0} = \frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \theta^{-(n+1+1)} \exp\left(-\frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)}{\theta}\right) d\theta$$

$$\therefore \hat{R}^2{}_{FT0} = \frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}}$$

$$\therefore \hat{R}^2{}_{FT0} = \frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta\right)^{n+1}}{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}} \qquad \ldots(27)$$

و الطريقة نفسها نجد مقدر بيز لدالة المعولية $[R(t)]^2$ لتوزيع وايبل الملوث المبتور نحصل على

$$\hat{R}^2{}_{FT} = \frac{\left(\sum x^\beta+\frac{\sum x^\beta-nT^B}{n}-nT^\beta\right)^{n+1}}{\left(\sum x^\beta+\frac{\sum x^\beta-nT^B}{n}-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}} \qquad \ldots(28)$$

وبعد التعويض في المعادلة (16) سيكوم مقدر بيز لدالة المعولية $[R(t)]^2$ لتوزيع ويبل المختلط كالاتي:

$$\hat{R}^{*2}{}_{T} = \frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta\right)^{n+1}}{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}} + (1-\hat{\lambda})\left[\frac{\left(\sum x^\beta+\frac{\sum x^\beta-nT^B}{n}-nT^\beta\right)^{n+1}}{\left(\sum x^\beta+\frac{\sum x^\beta-nT^B}{n}-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}} - \frac{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta\right)^{n+1}}{\left(\sum x^\beta+\sigma_0-nT^\beta+2t^\beta-2T^B\right)^{n+1}}\right]$$

وعليه يكون مقدر بيز لدالة المعولية R(t) لتوزيع ويبل المختلط المبتور بالاعتماد على صنف(الملوث ML-II-ε) وتحت دالة الخسارة DeGroot:

$$\hat{R}^{*2}_{FDT} = \frac{\frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta})^{n+1}}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta} + 2t^{\beta} - 2T^{B})^{n+1}} + (1-\hat{\lambda})\left[\frac{\left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{\beta} + 2t^{\beta} - 2T^{B}\right)^{n+1}} - \frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta})^{n+1}}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta} + 2t^{\beta} - 2T^{B})^{n+1}}\right]}{\frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta})^{n+1}}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta} + t^{\beta} - T^{B})^{n+1}} + (1-\hat{\lambda})\left[\frac{\left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{\beta} + t^{\beta} - T^{B}\right)^{n+1}} - \frac{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta})^{n+1}}{(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{\beta} + t^{\beta} - T^{B})^{n+1}}\right]} \quad ...(29)$$

الجانب التجريبي :

وستعملت المحاكاة في توليد البيانات من الدالة التراكميه التجميعية الاتيه

$$F_T(X) = 1 - \exp\left(\frac{-(t^{\beta} - T^{B})}{\theta}\right) \quad ...(30)$$

ولقيم θ المقترحة (0.7 ,0.5 ,0.4 ,0.3 = θ) وباعطاء قيم مختلفة للمعلمة θ، وكذلك لحجم العينة، إذ تم اختيار حجم العينة (100 ,50 ,25 ,15 =n) وبعد توليد البيانات والتعويض في المعادلات التقديرية (24) و (82) تم الحصول على المقدرات البيزية للمعلمة θ و دالة المعولية تحت دالة الخساره التربيعية واوضحت النتائج للمقدرات $(\hat{\theta}), (\hat{R})$ ولمتوسط مربعات الخطأ في الجداول المرفقة

الجدول (1)

مقدر بيز الحصين للمعلمه θ عندما (θ=0.7) ولحجوم العينة (100 ,50 ,25 ,15)

N	θ	$\hat{\theta}$	Mse
15	0.7	0.7327	0.0378
25	0.7	0.7209	0.0203
50	0.7	0.7083	0.0103
100	0.7	0.7051	0.0052

الجدول(2)

مقدر بيز الحصين لدالة المعولية R(t) عندما(θ=0.7) ولحجوم العينة (100, 50, 25, 15)

n	Rreal	$\hat{R}$	Mse		N	Rreal	$\hat{R}$	mse
	0.9378	0.9368	0.0004			0.9814	0.9813	0.0127
	0.8777	0.8757	0.0011			0.9626	0.9623	0.0394
	0.8158	0.8127	0.0020			0.9439	0.9435	0.0773
	0.7512	0.7469	0.0032			0.9253	0.9247	0.1201
15	0.6895	0.6835	0.0045		50	0.9052	0.9044	0.1851
	0.6273	0.6207	0.0058			0.8853	0.8843	0.2543
	0.5678	0.5610	0.0068			0.8656	0.8644	0.3346
	0.5048	0.4976	0.0078			0.8461	0.8449	0.4243
	0.4411	0.4336	0.0085			0.8262	0.8249	0.5189
	0.3810	0.3732	0.0088			0.8068	0.8054	0.6168
	0.9630	0.9628	0.0001			0.9901	0.9901	0.0199 e-004
	0.9270	0.9263	0.0002			0.9804	0.9803	0.0592 e-004
	0.8897	0.8888	0.0005			0.9704	0.9703	0.1216 e-004
	0.8504	0.8489	0.0008			0.9602	0.9601	0.1978 e-004
	0.8121	0.8101	0.0011			0.9506	0.9504	0.2902 e-004
25	0.7735	0.7713	0.0014		100	0.9404	0.9402	0.3961 e-004
	0.7330	0.7308	0.0019			0.9306	0.9304	0.5111 e-004
	0.6943	0.6920	0.0023			0.9202	0.9200	0.6621 e-004
	0.6566	0.6539	0.0028			0.9107	0.9104	0.8169 e-004
	0.6198	0.6169	0.0032			0.9009	0.9007	0.9707 e-004

الجدول(3)

مقدر بيز الحصين للمعلمه θ عندما (θ=0.5) ولحجوم العينة (100, 50, 25, 15)

n	θ	$\hat{\theta}$	Mse
15	0.5	0.5328	0.0198
25	0.5	0.5206	0.0106
50	0.5	0.5088	0.0053
100	0.5	0.5050	0.0027

الجدول(4)

مقدر بيز الحصين لدالة المعولية R(t) عندما(θ=0.5) ولحجوم العينة (15 ,25 ,50 ,100)

n	Rreal	$\hat{R}$	mse		N	Rreal	$\hat{R}$	Mse
15	0.9378	0.9380	0.0004		50	0.9814	0.9814	0.0126 e-003
	0.8777	0.8778	0.0010			0.9626	0.9625	0.0389 e-003
	0.8158	0.8158	0.0019			0.9439	0.9438	0.0762 e-003
	0.7512	0.7509	0.0030			0.9253	0.9251	0.1185 e-003
	0.6895	0.6883	0.0043			0.9052	0.9049	0.1825 e-003
	0.6273	0.6261	0.0055			0.8853	0.8849	0.2505 e-003
	0.5678	0.5670	0.0065			0.8656	0.8651	0.3295 e-003
	0.5048	0.5040	0.0074			0.8461	0.8457	0.4181 e-003
	0.4411	0.4402	0.0081			0.8262	0.8258	0.5114 e-003
	0.3810	0.3800	0.0084			0.8068	0.8064	0.6079 e-003
25	0.9630	0.9632	0.0001		100	0.9901	0.9901	0.0198 e-004
	0.9270	0.9271	0.0002			0.9804	0.9804	0.0589 e-004
	0.8897	0.8899	0.0004			0.9704	0.9704	0.1208 e-004
	0.8504	0.8504	0.0007			0.9602	0.9602	0.1964 e-004
	0.8121	0.8120	0.0011			0.9506	0.9505	0.2881 e-004
	0.7735	0.7735	0.0014			0.9404	0.9403	0.3931 e-004
	0.7330	0.7334	0.0018			0.9306	0.9306	0.5073 e-004
	0.6943	0.6948	0.0023			0.9202	0.9202	0.6574 e-004
	0.6566	0.6570	0.0027			0.9107	0.9106	0.8110 e-004
	0.6198	0.6202	0.0031			0.9009	0.9009	0.9643 e-004

الجدول(5)

مقدر بيز الحصين للمعلمه θ عندما (θ=0.4) ولحجوم العينة (15 ,25 ,50 ,100)

n	θ	$\hat{\theta}$	mse
15	0.4	0.4329	0.0131
25	0.4	0.4205	0.0069
50	0.4	0.4090	0.0034
100	0.4	0.4050	0.0017

الجدول(6)

مقدر بيز الحصين لدالة المعولية R(t) عندما (θ=0.4)ولحجوم العينة (15 ,25 ,50 ,100)

n	Rreal	$\hat{R}$	mse		N	Rreal	$\hat{R}$	mse
	0.9378	0.9389	0.0004			0.9814	0.9815	0.0124 e-003
	0.8777	0.8796	0.0010			0.9626	0.9627	0.0386 e-003
	0.8158	0.8184	0.0019			0.9439	0.9440	0.0755 e-003
	0.7512	0.7543	0.0029			0.9253	0.9255	0.1175 e-003
15	0.6895	0.6924	0.0041		50	0.9052	0.9053	0.1808 e-003
	0.6273	0.6308	0.0053			0.8853	0.8854	0.2479 e-003
	0.5678	0.5721	0.0063			0.8656	0.8657	0.3261 e-003
	0.5048	0.5094	0.0072			0.8461	0.8464	0.4139 e-003
	0.4411	0.4459	0.0078			0.8262	0.8265	0.5064 e-003
	0.3810	0.3857	0.0081			0.8068	0.8073	0.6020 e-003
	0.9630	0.9635	0.0001			0.9901	0.9901	0.0197 e-004
	0.9270	0.9277	0.0002			0.9804	0.9804	0.0586 e-004
	0.8897	0.8909	0.0004			0.9704	0.9705	0.1202 e-004 0.1954 e-004
	0.8504	0.8518	0.0007			0.9602	0.9603	0.2867 e-004
	0.8121	0.8137	0.0010			0.9506	0.9507	0.3909 e-004
25	0.7735	0.7755	0.0014		100	0.9404	0.9405	0.5047 e-004
	0.7330	0.7356	0.0018			0.9306	0.9307	0.6541 e-004
	0.6943	0.6972	0.0022			0.9202	0.9204	0.8068 e-004
	0.6566	0.6597	0.0027			0.9107	0.9108	0.9600 e-004
	0.6198	0.6231	0.0031			0.9009	0.9012	

الجدول(7)

مقدر بيز الحصين للمعلمه θ عندما (θ=0.3) ولحجوم العينة (15 ,25 ,50 ,100)

n	θ	$\hat{\theta}$	Mse
15	0.3	0.3330	0.0078
25	0.3	0.3203	0.0041
50	0.3	0.3093	0.0020
100	0.3	0.3050	9.8199e-004

الجدول(8)

مقدر بيز الحصين لدالة المعولية R(t) عندما(θ=0.3) ولحجوم العينة (15 ,25 ,50 ,100)

n	Rreal	$\hat{R}$	mse	n	Rreal	$\hat{R}$	Mse
	0.9378	0.9404	0.0004		0.9814	0.9817	0.0123e-003
	0.8777	0.8825	0.0010		0.9626	0.9630	0.0383e-003
	0.8158	0.8226	0.0018		0.9439	0.9445	0.0748e-003
	0.7512	0.7598	0.0029		0.9253	0.9261	0.1166e-003
15	0.6895	0.6990	0.0040	50	0.9052	0.9061	0.1791e-003
	0.6273	0.6383	0.0051		0.8853	0.8863	0.2452e-003
	0.5678	0.5804	0.0061		0.8656	0.8668	0.3224e-003
	0.5048	0.5183	0.0070		0.8461	0.8475	0.4096e-003
	0.4411	0.4552	0.0076		0.8262	0.8278	0.5012e-003
	0.3810	0.3952	0.0078		0.8068	0.8087	0.5958e-003
	0.9630	0.9641	0.0001		0.9901	0.9902	0.0197e-004
	0.9270	0.9288	0.0002		0.9804	0.9805	0.0585e-004
	0.8897	0.8925	0.0004		0.9704	0.9706	0.1195e-004
	0.8504	0.8539	0.0007		0.9602	0.9604	0.1944e-004
	0.8121	0.8164	0.0010		0.9506	0.9509	0.2851e-004
25	0.7735	0.7786	0.0014	100	0.9404	0.9407	0.3885e-004
	0.7330	0.7391	0.0018		0.9306	0.9310	0.5018e-004
	0.6943	0.7012	0.0022		0.9202	0.9207	0.6507e-004
	0.6566	0.6640	0.0026		0.9107	0.9112	0.8023e-004
	0.6198	0.6277	0.0030		0.9009	0.9016	0.9557e-004

الاسستنتاجات:

عن طريق التحليل باستعمال المحاكاة نستنتج ما يأتي:

1. **ان افضل تقدير للمعلمة θ هو عندما يكون حجم العينة (100) وهذا يتطابق مع النظرية الاحصائية .**
2. **ان افضل مقدر لدالة المعولية بطريقة بيز الحصين هو عندما يكون حجم العينة (100).**

التوصيات:

1- نوصي بتوسيع نطاق البحث ليشمل توزيعات احتمالية ذات معلمات اكثر لكي تساهم في وصف المتغيرات بدقة اخرى.

2- نوصي باعتماد توزيعات اولية اخرى ومقارنتها مع ما توصلنا اليه في بحثنا.

3- نوصي باعتماد التوزيعات المبتورة من الجهتين لانها توفر مرونة اكثر عند اختبار مدى موافقة التوزيع النظري للبيانات المبتورة.

المصادر

1. Anoop Chaturvedi · Manaswini Pati · Sanjeev K. Tomer(2013)" Robust Bayesian analysis ofWeibull failure model" METRON, DOI 10.1007/s40300-013-0027-7

2. Dallas R. Wingo(1989)" The left-truncated Weibull distribution theory and computation" Statistical Papers 30, 39-48

3. James Berger; L. Mark Berliner(1986)" Robust Bayes and Empirical Bayes Analysis with # -Contaminated Priors" *The Annals of Statistics*, Vol. 14, No. (Jun., 1986), pp. 461-486.

4. Mark Berliner (1984)" Robust Bayesian Analysis with Applications in Reliability" the Office of Naval Research under Contract N00014-84-k-0422.

5. Pankaj Sinha* and J. Prabha(2010)" Bayes Reliability Measures of Lognormal and Inverse Gaussian Distributions under ML-II e-contaminated Class of Prior Distributions" Defence Science Journal, Vol. 60, No. 4, July 2010, pp. 442-450