أسلوب مقترح لتدقيق الحل الأمثل لمشكلة المباراة

أ.م.د. عواد كاظم ألخالدي
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة كربلاء

الخلاصة

في هذا البحث ، تم اقتراح أسلوب جديد لتدقيق الحل الأمثل لمشكلة المباراة في البرمجة الخطية يعتمد على استخدام المصفوفات .حيث وضع مؤشر إحصائي ، فإذا كان الحل امثل يجب أن يحقق هذا المؤشر.

Summary :

In this paper , a new procedure was stated to test the optimal solution of game theory in the linear programming problem using elementary matrix algebra , if the solution is optimum it must provide this procedure

المقدمة:

يستخدم الأسلوب الرياضي لحل مشكلة المباراة عندما يكون لكلا المتنافسين إستراتيجيتين فقط, ويستخدم أسلوب الرسم عندما يكون لأحد المتنافسين إستراتيجيتين, بينما يكون للمتنافس الآخر إستراتيجيتين أو أكثر, وتستخدم طريقة أل Simplex لحل مشكلة المباراة عندما يكون لكلا المتنافسين إستراتيجيتين أو أكثر®. تمتاز طريقة أل Simplex بكفاءتها في حل مشكلة المباراة, وتمكّن من إجراء تحليل للمباراة في ضوء التغيرات التي تحصل في مصفوفة المباراة, ولكنها تمتاز بصعوبة العمليات الإجرائية لما يرافقها من تكرار ممل للعمليات الحسابية.

مشكلة البحث وهدفه:

يهدف هذا البحث إلى تقديم طريقة بسيطة لتدقيق الحل الامثل لمشكلة المباراة تمتاز بسهولة العمليات الإجرائية المستخدمة لغرض تحديد الإستراتيجيات التي سيطبقها كل متنافس للوصول إلى الحل الامثل.

الجانب النظري:

توضع مشكلة المباراة على شكل مصفوفة, تسمى مصفوفة الدفع[٢]،[٣] , ويحدد فيها الجهة الرابحة التي تسعى إلى تعظيم الأرباح, والجهة الخاسرة التي تهدف إلى تخفيض الخسائر. حيث تمثل الأرقام الموجبة ربحية المتنافس الأول,

---

® راجع كتب بحوث العمليات, مثل(شمخي,عدنان / سلمان, ضوية, مقدمة في بحوث العمليات/ ١٩٨٨).

والأرقام السالبة خسارة المتنافس الأول, وعلى العكس من ذلك؛ تمثل الأرقام الموجبة خسارة المتنافس الثاني, فيما تمثل الأرقام السالبة ربحية المتنافس الثاني. كما في الجدول ١.

الجدول ١

شكل مصفوفة المباراة

	x_1	x_2	x_3	......	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	......	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	......	a_{2n}
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	......	a_{3n}
......	.....	.....	......	......	......
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	......	a_{mn}

حيث تمثل $(x_j, \quad j=1,2,...,n)$ جزء من الوقت الذي يطبق فيه(أو احتمال أن يطبق) المتنافس الأول الإستراتيجية رقم j.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad (1)$$

و تمثل $(y_i, \quad i=1,2,...,m)$ جزء من الوقت الذي يطبق فيه(أو احتمال أن يطبق) المتنافس الثاني الإستراتيجية رقم i .

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1, \qquad (2)$$

والصيغة العامة لمشكلة المباراة بطريقة البرمجة الخطية (بعد سلسلة من الاشتقاقات)[١] هي كما في (٣)

$$Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$s.t \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le 1, \quad i=1,2,...,m, \qquad (3)$$

حيث؛

$$X_j = x_j / V \qquad (4)$$

وتمثل V قيمة المباراة.

$$V = 1/Z \qquad (5)$$

فإذا افترضنا إن الحل الامثل يقضي بأن يطبق المتنافس الأول k من الإستراتيجيات ويستبعد الإستراتيجيات الباقية, يمكن أن نقسم مصفوفة المباراة بطريقة تجزئة المصفوفات, ووضعها في جدول أل Simplexكما في الجدول ٢.

الجدول ٢

جدول أل Simplex لتمثيل مشكلة المباراة بطريقة المصفوفات.

		$\underline{1}'_1$	$\underline{1}'_2$	$\underline{0}'_1$	$\underline{0}'_2$	0
		$\underline{X}'_1$	$\underline{X}'_2$	$\underline{S}'_1$	$\underline{S}'_2$	$\underline{b}$
$\underline{0}_1$	$\underline{S}_1$	A_{11}	A_{12}	I_1	O	$\underline{1}_1$
$\underline{0}_2$	$\underline{S}_2$	A_{21}	A_{22}	O	I_2	$\underline{1}_2$
$Z_j -$	C_j	$-\underline{1}'_1$	$-\underline{1}'_2$	$\underline{0}'_1$	$\underline{0}'_2$	0

وبضرب الجدول ٢ بالمصفوفة H^* ؛

$$H = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_1 & 0 \\ 1'_1 A_{11}^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على الجدول ٣ الذي يمثل الحل الامثل لمشكلة المباراة.

---

* الباحث

الجدول ٣**

الحل الأمثل لمشكلة المباراة بطريقة أل Simplex

		$\underline{1}'_1$	$\underline{1}'_2$	$\underline{0}'_1$	$\underline{0}'_2$	0
		$\underline{X}'_1$	$\underline{X}'_2$	$\underline{S}'_1$	$\underline{S}'_2$	$\underline{b}$
$\underline{1}_1$	$\underline{X}_1$	I_1	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	O	$A_{11}^{-1}\underline{1}_1$
$\underline{0}_2$	$\underline{S}_2$	0	$A_{22.1}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I_2	$\underline{1}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\underline{1}_1$
$Z_j -$	C_j	$\underline{0}'_1$	$-\underline{1}'_2 + \underline{1}'_1 A_{11}^{-1}A_{12}$	$\underline{1}'_1 A_{11}^{-1}$	$\underline{0}'_2$	$\underline{1}'_1 A_{11}^{-1}\underline{1}_1$

حيث ؛ $A_{22.1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

** الباحث

الاساس النظري[*]:

إذا كانت $\underline{x}_1$ تمثل الحل الامثل لتعظيم أرباح المباراة, وكانت $\underline{y}_1$ تمثل الحل الامثل لتقليل خسائر المباراة (المشكلة المقابلة) فأن؛

$$\underline{x}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} B_{1j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{2j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{3j} \\ \ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{k} B_{kj} \end{bmatrix}, \quad \underline{y}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} B_{i1} \\ \sum_{i=1}^{k} B_{i2} \\ \sum_{i=1}^{k} B_{i3} \\ \ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{k} B_{ik} \end{bmatrix}, \quad V = \frac{|A_{11}|}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}}$$

حيث B_{ij} تمثل المحدد COFACTOR الذي يقابل a_{ij} في المصفوفة A_{11}.

ولإثبات ذلك:

من الجدول ٣:

$$\underline{X}_1 = A_{11}^{-1}\underline{1}_1$$

---

* الباحث

$$Z = \underline{1}_1' A_{11}^{-1} \underline{1}_1$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{1}_1' A_{11}^{-1}$$

وحيث إن قيمة $\underline{x}_1$ الحقيقية التي تمثل الحل الامثل للمتنافس الأول هي؛

$$\underline{x}_1 = \frac{\underline{X}_1}{Z} = \frac{A_{11}^{-1}\underline{1}_1}{\underline{1}_1' A_{11}^{-1} \underline{1}_1}$$

وان

$$A_{11}^{-1} = adj(A_{11}) / |A_{11}|$$

$$adj(A_{11}) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots\ldots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots\ldots & B_{2k} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots\ldots & B_{3k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ B_{k1} & B_{k2} & B_{k3} & \ldots\ldots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

حيث B_{ij} تمثل المحدد COFACTOR الــذي يقابــل العنــصر a_{ij} فــي المصفوفة A_{11} ,

نستنتج أن:

$$\underline{x}_1 = \frac{adj(A_{11})\underline{1}_1 / |A_{11}|}{\underline{1}_1' adj(A_{11})\underline{1}_1 / |A_{11}|} = \frac{adj(A_{11})\underline{1}_1}{\underline{1}_1' adj(A_{11})\underline{1}_1}$$

حيث؛

$$adj(A_{11})\underline{1}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots\ldots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots\ldots & B_{2k} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots\ldots & B_{3k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ B_{k1} & B_{k2} & B_{k3} & \ldots\ldots & B_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \ldots\ldots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} B_{1j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{2j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{3j} \\ \ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{k} B_{kj} \end{bmatrix}$$

وان،

$$\underline{1}_1' \, adj(A_{11})\underline{1}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots\ldots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots\ldots & B_{2k} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots\ldots & B_{3k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ B_{k1} & B_{k2} & B_{k3} & \ldots\ldots & B_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \ldots\ldots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} B_{ij}$$

وبذلك فأن؛

$$\underline{x}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} B_{ij}} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} B_{1j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{2j} \\ \sum_{j=1}^{k} B_{3j} \\ \ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{k} B_{kj} \end{bmatrix}$$

وان قيمة المباراة V هي

$$V = \frac{|A_{11}|}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}}$$

وبنفس الطريقة فان قيمة $\underline{Y}_1$ هي؛

$$\underline{y}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} B_{i1} \\ \sum_{i=1}^{k} B_{i2} \\ \sum_{i=1}^{k} B_{i3} \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} B_{ik} \end{bmatrix}$$

<u>كيفية استخدام النظرية:</u>

من الجدول ٣؛ وعلى فرض الاستمرار بتحويل المصفوفة A^* إلى مصفوفة الوحدة ؛ سنحصل على الجدول ٤

.

* A مصفوفة غير مفردة nonsingular

الجدول ٤

جدول أل Simplex® بعد الاستمرار بتحويل مصفوفة المباراة A إلى مصفوفة الوحدة (وهو ما يؤدي إلى الخطأ)

		$-\underline{1}'_1$	$-\underline{1}'_2$	$\underline{0}'_1$	$\underline{0}'_2$	0
		$\underline{X}'_1$	$\underline{X}'_2$	$\underline{S}'_1$	$\underline{S}'_2$	b
$\underline{1}_1$	$\underline{X}_1$	I_1	0	$A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}A_{221}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$	$-A_{11}^{-1}A_{12}A_{221}^{-1}$	$A_{11}^{-1}\underline{1}'_1-A_{11}^{-1}A_{12}A_{221}^{-1}\underline{1}_{21}$
$\underline{1}_2$	$\underline{X}_2$	0	I_2	$-A_{221}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$	A_{221}^{-1}	$A_{221}^{-1}\underline{1}_{21}$
Z_j-	C_j	$\underline{0}'_1$	$\underline{0}'_2$	$\underline{1}'_1A_{11}^{-1}-\underline{1}'_{21}A_{221}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$	$\underline{1}'_{21}A_{221}^{-1}$	$\underline{1}'_1A_{11}^{-1}\underline{1}_1+\underline{1}'_{21}A_{221}^{-1}\underline{1}_{21}$

فإذا كانت $\underline{X}_1$ و $\underline{X}_2$ و $\underline{Y}_1$ و $\underline{Y}_2$ موجبة فهذا يعني إن الحل في الجدول ٣ لم يكن حلا امثلا. وحيث إن الاستمرار بتطبيق خطوات طريقة أل Simplex يتطلب أولا وجود قيم سالبة في الصف Z_j-C_j(وهي غير موجودة) وان نختار اصغر قيمة موجبة من بين القيم الموجبة عند نسبة قيم العمود b على قيم العمود الذي افترضناه خطأ بأنه العمود الامثل, فان قسما من قيم $\underline{X}_1$ و $\underline{Y}_1$ في الجدول ٤ هي قيم سالبة .

ان المشكلة الرئيسة التي تصادفنا الآن هي إن قسما من قيم المتجه $\underline{X}_2$ قد تكون سالبة أيضا , ولهذا سوف لن نتمكن من استخدام هذه الطريقة في حل مشكلة المباراة , وإنما تستخدم لتدقيق الحل الأمثل لمشكلة المباراة حتى يتمكن الباحثون في مجال بحوث العمليات أو الرياضيات من تقديم طريقة تمكن من عزل القيود التي لا تؤثر على الحل الأمثل , عند ذلك سيكون

® الباحث

بالإمكان استخدام هذه الطريقة لإعطاء حل امثل لمشكلة المبـــاراة ولـــيس لتدقيق الحل الأمثل فقط.

على هذا الأساس فعند حساب المصفوفة adj(A) وإيجاد قيم $\underline{X}_1$ و $\underline{Y}_1$ فإذا كانت جميع قيم $\underline{X}_1$ و $\underline{Y}_1$ موجبة فان الحل امثل , إما إذا كانت هذه القـــيم سالبة وموجبة وصفرية, فهذا يعني إن هنالك من الستراتيجبات التي يجب ان لا تطبق من قبل أي من المتنافسين لأنها تؤدي إلـــى إن احتمـــال اســـتخدام الإستراتيجيات الأخرى هو احتمال سالب , ولذلك نقـــوم بحـــذف الأعمـــدة والصفوف التي تقابل القيم الموجبة في مصفوفة المبـــاراة ونحـــصل علـــى مصفوفة مباراة اصغر من حيث الرتبة تمثل المصفوفة A_{11} التـــي نـــستنتج منها الحل الأمثل .

يبقى الموضوع المهم , وهو تحليل الحساسية , فإذا توصـــلنا إلـــى تحديـــد المصفوفة A_{11} وكذلك $adj(A_{11})$ و $det(A_{11})$ يمكـــن حـــساب A_{11}^{-1} التـــي تستخدم لحساب المصفوفة H ؛ وبالتالي إيجاد الجـــدول ٣ الـــذي يـــستخدم لإجراء تحليل الحساسية إضافة إلى الحل الأمثل للمباراة.

أمثلة تطبيقية:

مثال ١ :افرض إن مصفوفة المباراة هي :

	x1	x2	x3	x4	Max	Min
y1	1	-5	-2	6	6	4
y2	-2	5	3	0	5	
y3	8	4	1	-3	8	
y4	-5	-6	2	4	4	
Min	-5	-6	-2	-3		
Max	-2					

عند حل هذه المشكلة بطريقة ال Simplex فان :

x4=	171/524	y1=	66/263
x2=	13/524	y2=	50/131
x1=	14/73	y3=	160/601
x3=	165/361	y4=	53/524
Z=	1 70/627	Z=	1 70/627

وعند حل المشكلة بالأسلوب الجديد للمتغيرات التي دخلت في الحل الأمثـــل فان adj(A) وقيم $\underline{x}$, $\underline{y}$, Z كما في الجدول ٥؛

الجدول ٥

حل المباراة بالأسلوب الجديد

					Sum		
adj(A)=	56	-30	148	27	201	x1	14/73
	71	170	-62	-153	26	x2	13/524
	-81	85	202	273	479	x3	165/361
	217	175	-9	-41	342	x4	171/524
Sum	263	400	279	106	1048		
	y1	y2	y3	y4			
	66/263	50/131	160/601	53/524	1		
Z=	1 70/627						

مثال ٢:افرض إن مصفوفة المباراة هي :

	Y_1	Y_2	Y_3	Max	Min
X_1	6	2	4	6	5
X_2	3	5	4	5	
X_3	2	8	3	8	
Min	2	2	3		
Max			3		

عند حل هذه المشكلة بطريقة إل Simplex فان :

x1	0.2500	y1	0.3333
x2	0.5000	y2	0.6667
x3	0.2500	y3	0.0000
v=	4.0000		

وعند حل المشكلة بالأسلوب الجديد للمتغيرات التي دخلت في الحل الأمثل فان adj(A) وقيم $\underline{x}$, $\underline{y}$, Z كما في الجدول ٦؛

الجدول ٦

حل المباراة بالأسلوب الجديد

				sum		
adj(A)	-17.00	-1.00	14.00	-4.00	y1	0.33
	26.00	10.00	-44.00	-8.00	y2	0.67
	-12.00	-12.00	24.00	0.00	y3	0.00
sum	-3.00	-3.00	-6.00	-12.00		
	x1	x2	x3	adj(A)=-48		
	0.25	0.25	0.50	V=-48/-12=4		

مثال ٣:افرض إن مصفوفة المباراة هي :

	y1	y2	y3	y4	Max	Min
x1	6	4	6	7	7	7
x2	5	8	6	6	8	
x3	4	10	5	3	10	
x4	5	6	9	4	9	
Min	4	4	5	3		
Max	5					

عند حل هذه المشكلة بطريقة ال Simplex فان الجدول ٧ يمثل الحل الأمثل لمشكلة المباراة :

الجدول ٧

حل المباراة بطريقة إل Simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	b
S_3	0	0	-0.57	-1.93	0.64	-1.57	1	0	0.07
X_1	1	0	0.86	1.14	0.29	-0.14	0	0	0.14
X_2	0	1	0.21	0.04	-0.18	0.21	0	0	0.04
S_4	0	0	3.43	-1.93	-0.36	-0.57	0	1	0.07
Z_j-C_j	0	0	0.07	0.18	0.11	0.07	0	0	0.18
					Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	

ومن الجدول

X_1	0.14/0.18=0.80	Y_1	0.11/0.18=0.60
X_2	0.04/0.18=0.20	Y_2	0.07/0.18=0.40
X_3	0.00	Y_3	0.00
X_4	0.00	Y_4	0.00
Z=0.18		V=1/0.18 = 5.60	

عند استخدام أسلوب المحددات فان الجدول ٨ يوضح لنا كيف إن قيم x وقيم y أصبحت سالبة وموجبة .

الجدول ٨

حل المباراة بالأسلوب الجديد

					sum	x
adj(A)=	172	-260	156	-28	40	1.00
	-25	29	15	-11	8	0.20
	-54	54	-54	54	0	0.00
	-56	160	-96	-16	-8	-0.20
sum	37	-17	21	-1	40	
y	0.93	-0.43	0.53	-0.03		

لذلك سنستخدم هذا الأسلوب ألان لغرض تدقيق الحل الأمثل فقط الذي نـــتج عن استخدام طريقة إل Simplex .

وبما ان المتغيرات التي دخلت الحل هـــي (X_1 و X_2) للمتنـــافس الاول و(Y_1 و Y_2) للمتنافس الثاني , فان المصفوفة A_{11} التي تمثل اساس basis الحل الامثل هي

	y1	y3
x1	6	4
x2	5	8

ومنها فان $adj(A_{11})$ وقيم $\underline{x}$, $\underline{y}$, Z كما في الجدول ٩؛

الجدول ٩

تدقيق الحل الأمثل للمباراة بالأسلوب الجديد

			sum		
adj(A11)	8	-4	4	x_1	0.80
	-5	6	1	x_2	0.20
sum	3	2	5		
	y_1	y_2		$det(A_{11})=28$	
	0.60	0.40		V=28/5=5.60	

الاستنتاجات :

من خلال ما تقدم نستنتج ان هذه الطريقة يمكن ان تستخدم لتدقيق صحة الحل الأمثل الذي نحصل عليه بالطرائق المعروفة لحل مشكلة المباراة. ويمكن استخدامها كطريقة لحل مشكلة المباراة متى تمكن الباحثون من استنباط أسلوب لعزل الإستراتيجيات التي لا تؤثر على الحل الامثل واستبعادها من المشكلة .

المصادر:

١_جزاع, عبد ذياب, بحوث العمليات, بغداد ١٩٨٥

٢_شمخي,عدنان / سلمان, ضوية, مقدمة في بحوث العمليات/ ١٩٨٨.

٣ – HAMDY TAHA/ OPERATION RESEARCH, AN INTRODUCTION, JHON WIELY & SONS/٥TH EDIT. /١٩٨٨.