أسلوب جديد لحل مشكلة التخصيص في البرمجة الخطية

ا.م.د عواد كاظم شعلان
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة كربلاء

الخلاصة :

في هذا البحث؛ تم تطوير اسلوب جديد لحل مشكلة التخصيص في البرمجة الخطية بالاعتماد على شروط كان . تاكر ومضروبات لانكرانج.

المقدمة:

تعتبر الطريقة الهنكارية لحل مشكلة التخصيص في البرمجة الخطية من افضل الطرائق الشائعة لحل مشكلة التخصيص والوصول الى الحل الامثل، غير ان اختبار الحل الامثل (من خلال رسم مستقيمات افقية وعمودية لتغطية الاصفار، واختيار الحل الامثل بعد ان يكون عدد المستقيمات الافقية والعمودية مساويا لعدد المكائن).قد يخلق مشاكل تطبيقية عند الكثير من مستخدمي هذه الطريقة ،وتعاني طريقة كافة التراتيب الممكنة من تضخم عدد الحالات الواجب ترتيبها للوصول الى الحل الامثل (n! من التراتيب لتوزيع n من الأعمال على n من المكائن)، و ان طريقة التوزيع العشوائي للأعمال على المكائن لا تحقق حلا أمثلا في اغلب الحالات.

الجانب النظري:

تعريف مشكلة التخصيص:

لنفرض ان لدينا n من المكائن التي تستطيع انجاز n من الاعمال المتوفرة ، تختلف كلفة انجاز عمل معين من ماكنة الى اخرى، والمطلوب توزيع هذه الاعمال على المكائن بما يؤدي الى تخفيض التكاليف الى ادنى حد ممكن . تمثل هذة المشكلة بصيغة جدول كما في الجدول 1 [1]؛

الأعمال					
	1	2	...	n	

الجدول 1 التمثيل الجدولي لمشكلة التخصيص.

المكائن	1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	… …	X_{1n} C_{1n}	1
	2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	… …	X_{2n} C_{2n}	1
	3	X_{31} C_{31}	X_{32} C_{32}	… …	X_{3n} C_{3n}	1
	…	… …	… …	…	.. …	..
	n	X_{n1} C_{n1}	X_{n2} C_{n2}	… …	X_{nn} C_{nn}	1
		1	1	...	1	

يمكن صياغة مشكلة مشكلة التخصيص كما في (1)[2]؛

$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \\
&s.t \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad\qquad\qquad (1) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \\
&\qquad\qquad X_{ij} = 0,1\ , \quad i, j = 1,2,3,\ldots,n
\end{aligned}
$$

تعتمد الطريقة الهنكارية(المجرية)♣[2] اسلوب طرح اقل قيمة في كل صف من قيم ذلك الصف ؛ نحصل على جدول جديد ؛ ونطرح اقل قيمة في كل عمود (في الجدول الجديد) من قيم ذلك العمود؛ نرسم اقل عدد ممكن من المستقيمات الافقية والعمودية لتغطية الاصفار؛ فاذا كان عدد المستقيمات اللازمة لتغطية الاصفار مساويا لعدد المكائن فان الحل امثلا.

§ لم يذكر اسم الطريقة في اغلب المصادر العربية

اما اذا كان عدد المستقيمات الكافية لتغطية الاصفار اقل من عدد المكائن فان الحل غيرامثل، وفي هذه الحالة نطرح اصغر رقم في الجدول الجديد(لم يمر عليه خط مستقيم) من كل رقم لم يمر عليه خط مستقيم ، ويضاف هذا الرقم الى كل رقم واقع في تقاطع مستقيمين (عدا الرقم صفر) ، ثم نعيد رسم المستقيمات من جديد لحين الوصول الى الحل الامثل.

استخدام مضروبات لاكرانج

تستخدم معادلة لاكر انج (2)[3] للحصول على نقطة الفصل الحرجة (النقطة السرجية) وايجاد قيم (X^*, l^*, m^*)التي تحقق الحل الامثل للمشكلة (1).

$$L(X, l, m) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} l_i(\sum_{j=1}^{n} X_{ij} - 1) - \sum_{j=1}^{n} m_j(\sum_{i=1}^{n} X_{ij} - 1), \quad (2)$$

حيث؛

l_i , m_j هي مضروبات لاكرانج[4].

تمثل المعادلات (5,4,3) المشتقة الجزئية الاولى للمعادلة(2) بالنسبة الى X_{ij}, l_i, m_j

وحيث ان المطلوب هو النهاية الصغري لدالة الهدف في المشكلة 1 ؛ فأن[4]

1 – اذا كانت قيمة المعادلة (3) اكبر من الصفر $\frac{\partial L}{\partial X_{ij}^*} > 0$ (عند النقطة X_{ij}^*)، فان X_{ij}^* تساوي صفرا.

2 – اذا كانت قيمة المعادلة (3) اقل من اوتساوي صفرا $\frac{\partial L}{\partial X_{ij}} \le 0$ (عند النقطة X_{ij}^*)، فان X_{ij}^* تأخذ اكبر قيمة(ممكنة) من قيم X_{ij} علما ان قيم X_{ij} هي صفر او واحد. بناءا على ذلك ، فاذا كان الصف i او العمود j يتضمن قيم لـ X تساوي واحد فان $X_{ij}^* = 0$ ، اما اذا لم يتضمن الصف i وكذلك العمود j قيمة لـ X تساوي واحد فان $X_{ij}^* = 1$.

وحيث ان عدد المعادلات التي تمثل القيود في المشكلة 1 هو 2n تضمن (2n-1) من المعادلات المستقلة (لأمكانية الحصول على اية معادلة من بقية المعادلات، فأن عدد المتغيرات الاساسية هو (2n-1). فاذا تمكنا من الحصول على (2n-1) من المتغيرات يكون فيها

$$\frac{\partial L}{\partial X_{ij}} = C_{ij} - l_i - m_j = 0$$

وان

$$\frac{\partial L}{\partial X_{ij}} = C_{ij} - l_i - m_j \geq 0$$

لبقية المتغيرات ، نكون قد حصلنا على الحل الامثل لمشكلة التخصيص.
بناءا على ذلك؛ يعتمد الاسلوب الجديد على اختيار حل اساسي لمشكلة التخصيص، فيه (2n-1) من المتغيرات الاساسية ، بعد ذلك يتم حساب قيم $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ من خلال المعادلة (6) للمتغيرات الاساسية $X_{ij} = 0,1$

$$C_{ij} - l_i + m_j = 0, \qquad (6)$$

وحيث ان عدد هذه المعادلات هو (2n-1) وتحتوي على (2n) من المتغيرات $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ نختار قيمة افتراضية لأحد هذه المتغيرات ولتكن $l_1 = 0$ ونجد قيم المتغيرات الباقية .

بعد ايجاد قيم $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ ؛ يتم حساب المعادلة (7) لكافة المتغيرات غير الاساسية ،

$$\hat{C}_{ij} = C_{ij} - l_i - m_j, \qquad (7)$$

فاذا كانت جميع قيم $\hat{C}_{ij}$ موجبة او صفرية ، فان الحل امثل. اما اذا وجدت قيمة واحدة او اكثر سالبة فان الحل غير امثل .

نظرية 1 [*] **:**

اذا كان الحل امثلا فان؛

$$Min\, Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j \qquad (8)$$

البرهان:

اذا كان الحل حلا امثلا فان؛
$C_{ij} - l_i - m_j = 0$ للمتغيرات الاساسية($X_{ij} = 0,1$) ،

---
[*] **الباحث**

وان

$C_{ij} - l_i - m_j \geq 0$ للمتغيرات غير الأساسية (X_{ij} =0) .

وهذا يعني ان

$C_{ij} = l_i + m_j$ للمتغيرات الاساسية $X_{ij} = 0,1$ ،

$C_{ij} \geq l_i + m_j$ للمتغيرات غير الاساسية $X_{ij} = 0$ ،

ولما كان عدد المتغيرات الاساسية التي تساوي 1 هو n، بحيث لا يتكرر أي متغير اساسي مساو للواحد في أي صف او أي عمود (أي ان هنالك متغير اساسي واحد فقط قيمته تساوي 1 في كل صف وفي كل عمود) ، وان بالامكان ترتيب المشكلة بحيث تقع المتغيرات الاساسية التي تساوي 1 على القطر فقط ؛

وحيث ان

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

لذلك فان ؛

$$Min\ Z = C_{11} *1 + C_{22} *1 + ... + C_{nn} *1 + (zero's)$$

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j \qquad (9)$$

كما ان اي قيمة ابتدائية لـ l_i او لـ m_j تحقق المعادلة (8) عندما يكون الحل امثل ، بالاعتماد على المعادلة (6).

الأسلوب الجديد[Ò] :

(بافتراض ان المطلوب تخفيض التكاليف)

أولا:

ا – نختار اصغر رقم في الجدول، ونضع $X_{ij}^{1} = 1$

ب– نختار ثاني اصغر رقم في الجدول فاذا وقع في صف او عمود يحتوي $X_{ij} = 1$ ، نضع $X_{ij}^{2} = 0$ ، وبعكسه نضع $X_{ij}^{2} = 1$ ، على ان يكون العدد الكلي للقيم المختارة (2n-1) .

ملاحظة 1 : عدم تكرار اكثر من قيمتين في نفس الصف او نفس العمود.

ثانيا:

Ò **الباحث**

نبدأ الان بتطبيق اسلوب عوامل الضرب، وذلك بحساب قيم ($l_i , m_j , i, j = 1,2,3,...,n$) من المعادلة (6) للمتغيرات الاساسية وتطبيق هذه القيم في المعادلة (7) للمتغيرات غير الاساسية ، فاذا كانت جميع قيم المعادلة (7) غير سالبة فالحل امثل ، اما اذا وجدت قيم سالبة للمعادلة (7) ، نختار الرقم الاكثر سالبية ونرسم له مسارا متعرجا.

تعريف المسار المتعرج:

هو مجموعة مستقيمات افقية وعمودية ، تبدأ بمتغير غير اساسي وتنعكس بمتغير اساسي الى ان ترجع الى نفس نقطة البداية.

ثالثا:

أ – لكل متغير في المسار المتعرج نضع اشارة (+) او (−) حيث نبدأ بأشارة (+) لأول متغير تليها اشارة (−) ثم اشارة (+) تليها اشارة (−) وهكذا ...ونضع تحت كل اشارة قيمة المتغير X_{ij} .

ب – نختار اصغر متغير عليه اشارة سالبة ، تضاف قيمة هذا المتغير الى كل رقم عليه اشارة موجبة وتطرح

$$Min\, Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j \qquad (9)$$

كما ان اي قيمة ابتدائية لـ l_i او لـ m_j تحقق المعادلة (8) عندما يكون الحل امثل ، بالاعتماد على المعادلة (6).

من كل رقم عليه اشارة سالبة . يصبح لدينا حل اساسي جديد .

جـ – نعود الى الخطوة ثانيا . الى ان تصبح جميع قيم المعادلة (7) غير سالبة نكون قد حصلنا على الحل الامثل .

نظرية 2[..] :

يجب ان لا تشكل كل أربعة اختيارات شكلا مستطيلا.

البرهان :

[..] الباحث

افرض ان الخلايا المختارة هي $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ وهي تمثل شكلا مستطيلا

لذلك يكون

$$C_{11} = l_1 + m_1,\ C_{12} = l_1 + m_2$$
$$C_{21} = l_2 + m_1,\ C_{22} = l_2 + m_2$$

ومنها فان

$$l_1 - l_2 = C_{11} - C_{21}$$
$$l_1 - l_2 = C_{12} - C_{22}$$

أي ان

$$C_{11} - C_{21} = C_{12} - C_{22}$$

وهي حالة خاصة ، اذ ان قيم C_{ij} قيم محددة بموجب المشكلة .

مثال تطبيقي1:

جد الحل الامثل لمشكلة تخفيض تكاليف التخصيص للجدول التالي.

18	**25**	**30**	**19**	**17**
21	**40**	**18**	**28**	**41**
42	**22**	**34**	**31**	**33**
37	**38**	**29**	**26**	**39**
24	**19**	**43**	**37**	**14**

اولا:

أ – توزيع المتغيرات وفقا لأدنى كلفة،

18 1	**25**	**30**	**19**	**17 0**
21 0	**40**	**18 1**	**28**	**41**
42	**22 1**	**34**	**31**	**33**
37	**38**	**29 0**	**26 1**	**39**
24	**19 0**	**43**	**37**	**14 1**

ثانيا:

حساب قيم $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ **؛ من المعادلة (4)**

ويوضع قيمة $l_1 = 0$ نحصل على ما يلي

$$l_1 + m_1 = 18 ، l_1 + m_5 = 17 ، l_2 + m_1 = 21$$
$$l2 + m_3 = 18 ، l_4 + m_3 = 29 \quad l3 + m_2 = 22$$
$$l_4 + m_4 = 26 \quad l_5 + m_2 = 19 \quad l_5 + m_5 = 14$$

$$l1 = 0,\ l2 = 3,\ l3 = 0,\ l4 = 14,\ l5 = -3$$
$$m1 = 18,\ m2 = 22,\ m3 = 15,\ m4 = 12,\ m5 = 17$$

وبتعـويض هـذه القـيم فـي المعادلـة (5) لكافـة المتغيـرات غيـر الأساسـية نحصـل علـى قـيم $\hat{C}_{ij}, i, j = 1,2,3,4,5$

$$\hat{C}_{12} = 3 \ , \hat{C}_{13} = 15, \hat{C}_{14} = 7, \hat{C}_{22} = 15,$$
$$\hat{C}_{24} = 13, \hat{C}_{25} = 21, \hat{C}_{31} = 24,, \hat{C}_{33} = 16,$$
$$C_{34} = 19\hat{C}_{35} = 16, \hat{C}_{41} = 5 \ , \hat{C}_{42} = 2,$$
$$\hat{C}_{45} = 8, \hat{C}_{51} = 9, \quad \hat{C}_{53} = 31, \hat{C}_{54} = 28$$

وحيث ان جميع قيم $\hat{C}_{ij}, i, j = 1,2,3,4,5$ غير سالبة فان الحل امثل ، وان قيمة Z هي

$$Min\,Z = 18 + 18 + 22 + 26 + 14 = 98$$
$$Min\,Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j$$
$$= (0 + 3 + 0 + 6 - 3) + (18 + 22 + 15 + 19 + 17)$$
$$= 6 + 92 = 98$$

مثال تطبيقي2: جد الحل الامثل لمشكلة تخفيض تكاليف التخصيص للجدول التالي.

29	37	30	25	41
36	40	22	34	42
39	23	43	26	32
38	21	46	19	35
45	33	31	29	38

اولا: أ – توزيع المتغيرات وفقا لأدنى كلفة،

29 1	37	30	25 0	41
36	40	22 1	34	42
39	23 1	43	26	32 0
38	21 0	46	19 1	35
45	33	31 0	28	38 1

ثانيا:

حساب قيم $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ ؛ من المعادلة (4)

$$l_1 + m_1 = 29, l_1 + m_4 = 25, l_2 + m_3 = 22$$
$$l_3 + m_2 = 23, l_3 + m_5 = 32, l_4 + m_2 = 21$$
$$l_4 + m_4 = 19, l_5 + m_3 = 31, l_5 + m_5 = 38$$

وبوضع قيمة $l_1 = 0$ نحصل ما يلي

$l1 = 0,\ l2 = -7,\ l3 = -4,\ l4 = -6,\ l5 = 2,$
$m1 = 29,\ m2 = 27,\ m3 = 29,\ m4 = 25,\ m5 = 36$

وبتعـويض هـذه القـيم فـي المعادلـة (5) لكافـة المتغيـرات غيـر الأساسـية نحصـل علـى قـيم $\hat{C}_{ij}\ , i, j = 1,2,3,4,5$

$\hat{C}_{12} = 6\ , \hat{C}_{13} = 1,\quad \hat{C}_{15} = 5,\ \hat{C}_{21} = 14,$
$\hat{C}_{22} = 20, \hat{C}_{24} = 16, \hat{C}_{25} = 13, \hat{C}_{31} = 14,$
$C_{33} = 18 \hat{C}_{34} = 4,, \hat{C}_{41} = 15\ , \hat{C}_{43} = 23,$
$\hat{C}_{45} = 5, \hat{C}_{51} = 14,\quad \hat{C}_{52} = 4, \hat{C}_{54} = 5$

وحيث ان جميع قيم $\hat{C}_{ij}\ , i, j = 1,2,3,4,5$ غير سالبة فان الحل امثل ، وان قيمة Z هي

$Min\ Z = 29 + 22 + 23 + 19 + 38 = 131$
$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j$$
$= (0 - 7 - 4 - 6 + 2) + (29 + 27 + 29 + 25 + 36)$
$= -15 + 146 = 131$

مثال تطبيقي3: جد الحل الامثل لمشكلة تخفيض تكاليف التخصيص للجدول التالي.

38	19	35	3
20	45	39	15
6	29	11	45
40	48	1	26

اولا:

أ – توزيع المتغيرات وفقا لأدنى كلفة،

38	0 19	35	1 3
20	1 45	39	0 15
1 6	29	0 11	45
40	48	1 1	26

وحيث ان الخلايا $X_{12},\ X_{14},\ X_{21},\ X_{24}$ تشكل مستطيلا فلا يمكن استخدام طريقة عوامل الضرب ، وعليه تم استخدام الحل التالي دون الاخلال بوجوب ان لا يكون في الصف او العمود اكثر من قيمتين حيث اختيرت الخلية X_{21} بدلا من الخلية X_{22}

38	1 19	35	0 3
0 20	45	39	1 15
1 6	29	0 11	45
40	48	1 1	26

ثانيا:

حساب قيم $l_i, m_j, i, j = 1,2,3,...,n$ ؛ من المعادلة (4)

$$l_1 + m_2 = 19, l_1 + m_4 = 3, l_2 + m_1 = 20, l_2 + m_4 = 15,$$
$$l_3 + m_1 = 6, l_3 + m_3 = 11, l_4 + m_3 = 1$$

وبوضع قيمة $l_1 = 0$ نحصل ما يلي

$$l1 = 0,\ l2 = 12,\ l3 = -2,\ l4 = -12,$$
$$m1 = 8,\ m2 = 19,\ m3 = 13,\ m4 = 3$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (5) لكافة المتغيرات غير الأساسية نحصل على قيم $\hat{C}_{ij}, i, j = 1,2,3,4$

$$\hat{C}_{11} = 30\ , \hat{C}_{13} = 22, \hat{C}_{22} = 14, \hat{C}_{23} = 14, \hat{C}_{32} = 12$$
$$C_{34} = 44, \hat{C}_{41} = 44\ , \hat{C}_{42} = 41, \hat{C}_{44} = 35$$

وحيث ان جميع قيم $\hat{C}_{ij}, i, j = 1,2,3,4$ غير سالبة فان الحل امثل ، وان قيمة Z هي

$$Min\ Z = 19 + 15 + 6 + 1 = 41$$
$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{j=1}^{n} m_j$$
$$= (0 + 12 - 2 - 12) + (8 + 19 + 13 + 3)$$
$$= -2 + 43 = 41$$

الاستنتاجات:

من خلال العديد من الامثلة التطبيقية التي قام بها الباحث تبين ان الحل باستخدام هذه الطريقة غالبا ما يكون حلا امثلا دون الحاجة الى استخدام المسار المتعرج STEEPING STONE . فمن خلال الامثلة التطبيقية الثلاثي و ُلدّت ارقامها بطريقة توليد الارقام العشوائية باستخدام

الايعاز RAND في النظام ألبرامجي EXCEL-XP2003 لم تظهر حالة تستدعي استخدام طريقة المسار المتعرج ، وانما كان الحل امثلا في جميع الحالات.

المصادر

1_جزاع، عبد ذياب، بحوث العمليات، بغداد 1985

2_شمخي،عدنان / سلمان، ضوية، مقدمة في بحوث العمليات/ .1988

3 – MOOD, GRAYBILL, BOES / INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS/3rd EDIT./ McGRAW-HILL/New York/1974.

0

.

4 – WILSON, GOELHO, MACGILL, WILLIAMS / OPTIMIZATION IN LOCATION AND TRANSPORT ANALYSIS / JOHN-WILEY & SON / New York / 1981.