مقارنة بين أسلوب بيز وطرائق أخرى لتقديـــــر معلمة القياس لتوزيــــــع ويبل ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة

م.م زينة معين محمد حسين

جامعة بغداد/شعبة العقود الحكومية

الملخص:

يتناول هذا البحث مقارنة عدة مقدرات لمعلمة القياس لتوزيع ويبل ذي المعلمتين $WE(\lambda,\theta)$, إذ أن (λ) معلمة الشكل و(θ) معلمة القياس وتحت افتراض إن(λ) معلومة. تم تقدير المعلمة(θ) بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة مقدر (Minimax Estimator) الذي يعتمد على طريقة بيز في التقدير وتحت دالة خسارة تربيعية ولابد من إيجاد المقدر الذي يجعل اكبر خسارة متوقعة هي اقل مايمكن، وكذلك مقدر أخر ناتج من تعديل دالة الخسارة التربيعية إلى نوع أخر من الدوال وهي (Modified Linear Exponential Loss Function) والمقدر الرابع هو مقدر وايت المعتمد على الانحدار . وسوف تتم المقارنة بين المقدرات باعتبار إن(λ) ثابتة مفروضة وتجرى المقارنة بين المقدرات الأربعة للمعلمة(θ) بواسطة المحاكاة وباعتماد المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) كأساس في المقارنة وتحت حجوم العينات ($n = 25,50,100$) وقيم مختلفة للمعلمات والتي أظهرت بان الطريقة (Minimax) المعتمدة على دالة الخسارة التربيعية (MOM) كانت أفضل وأكفأ طريقة لأنها حققت اقل(MSE) ولجميع الحالات وكذلك أحجام العينات المستخدمة في البحث.

ABSTRACT:

This paper is concerned with problem of comparing different estimators of the scale parameter of two parameters Weibull distribution $WE(\lambda,\theta)$ where is (λ)shape parameter and θ is scale parameter and then comparing the efficiency of the estimators which are maximum likelihood and minimax estimator with (quadratic loss function) and (modified linear exponential loss functions) the comparison was done using simulation procedure with different sample size and values of parameters ,on the bases of simulation experiment we conclude that minimax method with quadratic loss function was the best method at all sample size and values of parameters.

هدف البحث:

في ظل التطور السريع الذي تشهدهُ دراسات المعولية ظهرت مؤخراً العديد من التوزيعات التي تصف بدقة أوقات الفشل، و يعّد توزيع ويبل هو من التوزيعات المهمة التي تصف أوقات الفشل في تطبيقات المعولية لا سيما في حالة كون دالة المخاطرة متغيرة مع الزمن، وهذه الصفة جعلت منه أنموذجاً جيداً وكفوءاً في وصف العديد من بيانات الفشل.يهدف هذا البحث إلى المقارنة بين أربع مقدرات(طريقة الإمكان الأعظم وMinimax بنوعيه ومقدر المربعات الصغرى) لمعلمة القياس (θ) لتوزيع ويبل ذي المعلمتين باعتبار أن معلمة الشكل (λ) معلومة .

الجانب النظري:

تُعرف الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر x والذي يتوزع توزيع ويبل بالمعلمتين (θ,λ) بالمعادلة:

$$f(t;\lambda,\theta) = \lambda/\theta x^{\lambda-1} e^{-x^{\lambda}/\theta} \quad , \; x,\lambda,\theta > 0 \qquad \text{.......(1)}$$

إذ إن:

λ :تمثل معلمة الشكل Shape Parameter.

θ :تمثل معلمة القياس Scale Parameter.

إن دالة التوزيع التجميعية لهذا التوزيع هي:

$$F(x;\lambda,\theta) = 1 - e^{-x^{\lambda}/\theta} \qquad \theta,\lambda,t > 0 \qquad \text{.......(2)}$$

طرائق التقدير المستخدمة في البحث هي:

1- طريقة الإمكان الأعظم:Maximum Likelihood Method (M.L.E):-

تعَد هذه الطريقة إحدى أهم طرائق التقدير والتي تهدف إلى جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى،فإذا كانت لدينا عينة عشوائية $(x_1,\ldots,x_n)$ ، تتوزع وفقا لتوزيع ويبل بمعلمة الشكل(λ) ومعلمة القياس(θ)، فان مقدر الإمكان الأعظم هوالذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليها باشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان ومساواتها بالصفر، فإذا كانت (x) تتوزع توزيع ويبل بمعلمتين(λ,θ) فان دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda,\theta)=(\lambda^n/\theta^n)\prod_{i=1}^{n}(x_i^{\lambda-1})e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}/\theta} \quad ; \quad (x_i,\lambda,\theta>0), i=1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فان المعادلة السابقة تصبح كالأتي:

$$\ln(L)=-n\log(\theta)+n\log(\lambda)+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\lambda}}{\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة (6) بالنسبة لكل من المعلمتين(θ) ،مع اعتبار(λ) معلومة ومساواتهما بالصفر نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم التالي:

$$\hat{\theta}_{mle}=\frac{T}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

آذ أن

$$T=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}$$

2- طريقة Minimax :Method of Minimax (M.O.M) [2] [4]

يعتمد هذا المقدر بالأساس على نظرية (Lehmann's theorem) فإذا كانت لدينا ($\tau=F_\theta,\theta\in\Phi$) عائلة من دوال التوزيع وان(D) هو مجال المعلمة (θ) فان ($d^*\in D$) يسمى مقدر بيز للمعلمة (θ) بافتراض توزيع أولي للمعلمة(θ) هو $\xi^*(\theta)$ على الفضاء (Φ) وان دالة المخاطرة المترتبة على هذا المقدر $R(d^*,\theta)$ ستكون ثابتة وان (d^*) هو مقدر Minmax بافتراض دالة خسارة تربيعية $L=Loss=\left(\frac{\theta-d_1}{\theta}\right)^2$ وسوف نوجد المقدر (d_1) باعتبار أن التوزيع الأولي للمعلمة (θ) هو توزيع كاما .

$$\pi(\theta)\propto\frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}\theta^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{1}{\beta\theta}} \qquad \theta>0,\alpha,\beta>0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

سيتم اشتقاق صيغة للمقدر (d_1) للمعلمة θ بعد أن تبين أن التوزيع اللاحق للمعلمة θ بوجود عينة عشوائية من X هي $(x_1,\ldots,x_n)$ سيكون

$$\pi(\theta\setminus \underline{x})=\frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+n+1}e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta})}}{\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+\beta+1}e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta\theta})d\theta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

وبعد أجراء التكامل والاختصار يكون التوزيع اللاحق $\pi(\theta\setminus \underline{x})$ هو أيضا كاما

$$\pi(\theta\setminus \underline{x})=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta})^{n+\alpha}}{\Gamma n+\alpha}(1/\theta)^{\alpha+n+1}e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\pi(\theta\setminus \underline{x})\sim Gamma(n+\alpha,\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta})$$

وطبقا لدالة الخسارة التربيعية

$$\text{Loss} = \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2$$

$$R(d_1,\theta) = E(\text{loss}) = \int_0^\infty \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2 \pi(\theta \setminus \underset{-}{x})d\theta$$ ....(9)

$$= \pi(\theta \setminus \underset{-}{x}) - 2d_1E(\frac{1}{\theta}) + d_1^2E(\frac{1}{\theta^2})$$

$$\frac{\partial R(d_1,\theta)}{\partial d_1} = -2E(\frac{1}{\theta}) + 2d_1E(\frac{1}{\theta^2})$$ ....(10)

$$\Rightarrow \ d_1^* = \frac{E(\frac{1}{\theta})}{E(\frac{1}{\theta^2})}$$ ....(11)

ولابد من إيجاد هذه التوقعات

$$E(\frac{1}{\theta}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\pi(\theta \setminus \underset{-}{x})d\theta = \frac{(n+\alpha)}{(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda + \frac{1}{\beta})}$$ ....(12)

$$E(\frac{1}{\theta^2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\pi(\theta \setminus \underset{-}{x})d\theta = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}{(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda + \frac{1}{\beta})^2}$$ ....(13)

$$\therefore d_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\lambda + \frac{1}{\beta}}{n+\alpha+1}$$ ....(14)

$$= k_1(T + \frac{1}{\beta})$$ ....(15)

اذ ان

$$k1 = \frac{1}{n+\alpha+1}$$ ....(16)

$$T = \sum_{i=1}^n x_i^\lambda$$

اما دالة الخسارة الناتجة عن المقدر (d_1^*) وهي (δ_θ^β)

$$R(\theta) = E(\text{Loss}) = E\left(\frac{\delta_\theta^\beta - \theta}{\theta}\right)^2$$ ....(17)

$$R(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\left[k_1^2E(T + \frac{1}{\beta})^2 - 2K_1\theta E(T + \frac{1}{\beta}) + \theta^2\right]$$ ....(18)

$$\because X_i \sim \text{weibull}(\theta)$$

$$\therefore T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n,\theta)$$

وعليه فان

$$E(T + \frac{1}{\beta}) = n\theta + \frac{1}{\beta}$$ ....(19)

$$E(T + \frac{1}{\beta})^2 = E(T^2) + \frac{2}{\beta}E(T) + \frac{1}{\beta^2} = n(n+1)\theta^2 + \frac{2}{\beta}n\theta + \frac{1}{\beta^2}$$ ....(20)

وعند تعويض قيم التوقعات في المعادلة(18)سوف تصبح دالة الخسارة

$$R(\theta)=n(n+1)k_1^2+\frac{2k_1(nk_1-1)}{\beta\theta}+\left(\frac{k_1}{\beta\theta}\right)^2-2nk_1+1 \qquad \text{.......................... (21)}$$

وهنـــا نجــد أن $R(\theta)$ليســت ثابتـــة ولكنهــا تعتمــد علــى (β,θ)وبــذلك يكــون مقــدر دالـــة المخــارة $\delta_\theta^\beta=k_1(T+\frac{1}{\beta})$ **(Risk Function Estimator) هو ليس بالضبط مقدر من نوع(Minimax Estimator) ولكن عندما $\beta\to\infty$ فان**

$$R(\theta)=n(n+1)k_1^2-2nk_1+1 \qquad \text{........................... (22)}$$

وهي مستقلة عن (θ) وعندئذ يكون (δ_θ^β) هو مقدر(θ) Semi-Minimax Estimator of

3− مقدر بيز تحت دالة الخسارة (Mlinex) : Method of Minimax under modified linear Exponential Loss Function (Mlinex)[4]

في هذه الطريقة تكون دالة الخسارة معرفة بالصيغة:

$$L(\theta,d_2)=w\left[\left(\frac{d2}{\theta}\right)^c-c\ln\left(\frac{d_2}{\theta}\right)-1\right] \qquad \text{..............................(23)}$$

حيث أن:

(d_2) هو المقدر للمعلمة (θ)

(w,c) ثوابت معلومة في دالة الخسارة

ان مقدرMinimax للمعلمة (θ) ولدالة الخسارة () هو d_2 (وسوف نرمز له δ_{ml}^β) يساوي

$$d_2=\delta_{ml}^\beta=\left[E(\theta^{-c})\right]^{-1/c} \qquad \text{................................(24)}$$

$$E(\theta^{-c})=\int_0^\infty \theta^{-c}\pi(\theta\setminus \underline{x})d\theta \qquad \text{..................................(25)}$$

$$E(\theta^{-c})=\int_0^\infty \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda+1/\beta)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{-(\alpha+n+c+1)}e^{-1/\theta(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda+1/\beta)}d\theta=\frac{\Gamma(n+\alpha+c)}{\Gamma(n+\alpha)}\left(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda+\frac{1}{\beta}\right)^{-c} \qquad \text{.....(26)}$$

ومنه نجد إن المقدر الثاني من نوع(Minimax) ولدالة خسارة الاسية معدلة هو

$$\therefore d_2^*=k_2(T+\frac{1}{\beta}) \qquad \text{....................................(27)}$$

إذ أن

$$k_2=\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{1/c} \qquad \text{.....................................(28)}$$

$$T=\sum_{i=1}^n x_i^\lambda$$

وان دالة المخاطرة المترتبة عن هذا المقدر هي : $Risk=E(loss)$ ، ومنها

$$E\left(\sum_{i=1}^n x_i^\lambda\right)^c=\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)}\theta^c \qquad \text{....................................(29)}$$

$$E(\ln t)=\ln(\theta)+\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \qquad \text{..................................(30)}$$

وطبقا لذلك تكون دالة الخسارة المتوقعة

$$R(\theta)=E(L(\theta,d_2))$$
$$=w\left[\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha+c)}-\ln\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)-c\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}-1\right] \quad \text{.................................(31)}$$

وهي ثابت لا يعتمد على (θ) وان(w,n,α,c) معلومة

ولمقارنة كفاءة المقدرين (d_2,d_1^*) لابد من حساب تباين كل منهما:

$$var(d_1^*)=\frac{1}{(n+\alpha+1)^2}var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{...............................(32)}$$

$$var(d_2)=\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{2/c}var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{...............................(33)}$$

وعلية فان كفاءة (d_2) نسبة إلى (d_1^*) تساوي:

$$E(d_1^*,d_2)=\frac{\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{2/c}var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta}\right)}{\frac{1}{(n+\alpha+1)^2}var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda}+\frac{1}{\beta}\right)}=\frac{\left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+c)}\right)^{2/c}}{\frac{1}{(n+\alpha+1)^2}} \quad \text{..................................(34)}$$

عندما $c=1$ **فان** $E=\frac{(n+\alpha+1)^2}{(n+\alpha)^2}>1$

وعندما $c=-1$ **فان** $E=\frac{(n+\alpha+1)^2}{(n+\alpha-1)^2}>1$

وبما أن $E>1$ **فان كفاءة مقدر بيز تحت دالة الخسارة التربيعية (Q.L.F)هو(d_1^*) أفضل من كفاءة المقدر(d_2) .**

4- طريقة المربعات الصغرى: Ordinary Least Square Method (OLSM)

تعتمد هذه الطريقة على أسلوب الانحدار ،فمن خلال الدالة الاحتمالية التراكمية(CDF) حيث أن:

$$F(x_i)=1-e^{-\frac{x_i^{\lambda}}{\theta}} \quad \text{...............................(35)}$$

$$\therefore e^{-\frac{x_i^{\lambda}}{\theta}}=1-F(x_i) \quad \text{...............................(36)}$$

وبأخذ اللوغاريتم

$$\therefore \frac{-x_i^{\lambda}}{\theta}=\log(1-F(x_i)) \quad \text{...............................(37)}$$

من جديد نأخذ اللوغاريتم مع التبسيط ينتج:

$$\log[-\log(1-F(x_i))]=\lambda\log x_i-\log\theta \quad \text{...............................(38)}$$

$$\log t_i=\lambda\log x_i-\log\theta \quad \text{...............................(39)}$$

وعند مقارنة هذه المعادلة مع معادلة الانحدار الخطي البسيط نجد ان

$$E(y_i)=\alpha+\beta x_i$$
$$\alpha=-\log\theta$$
$$\lambda=\beta$$
$$x_i=\log(x_i)$$
$$y_i=\log(-\log(1-F(x_i)))$$

وطبقا لمقدرات المربعات الصغرى لمعادلة الانحدار الخطي البسيط فان

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{............................(40)}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \qquad \text{............................(41)}$$

$$\therefore \hat{\alpha} = -\log\theta \Rightarrow \hat{\theta} = e^{-\hat{\alpha}} \qquad \text{............................(42)}$$

$$\hat{\lambda} = \hat{\beta} \qquad \text{............................(43)}$$

الجانب التجريبي:

تم إجراء البحث باستخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبياً،إذ يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظرياً من دون الحصول عليها عملياً وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- تحديد القيم الافتراضية: لقد تم اختيار أربعة أحجام للعينات هي (10،25،50،100) وقيم مختلفة أيضاً لمعلمات التوزيع الحقيقية وهي موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (1)

- يوضح القيم المختلفة للمعلمات المستخدمة في البحث -

الحالات	θ	λ	α	β	C
1	0.5	1	0.5	1	1
2	0.5	1	0.5	1	-1
3	0.5	1	1	0.5	1
4	0.5	1	1	0.5	-1
5	1	0.5	0.5	1	1
6	1	0.5	0.5	1	-1
7	1	0.5	1	0.5	1
8	1	0.5	1	0.5	-1
9	0.5	1	0.5	1	2
10	0.5	1	0.5	1	-2
11	0.5	1	1	0.5	2
12	0.5	1	1	0.5	-2
13	1	0.5	0.5	1	2
14	1	0.5	0.5	1	-2
15	1	0.5	1	0.5	2
16	1	0.5	1	0.5	-2

2- توليد البيانات: وفيها يتم توليد البيانات التي تخضع لتوزيع ويبل ووفقاً لكل قيمة من قيم المعلمات الافتراضية وحجم العينة المحدد في الخطوة (1) ويتم من خلال:

أ- توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0,1)$.

$$U_i \sim U(0,1) \;\; , \;\; i = 1,\dots,n \qquad \text{........................(44)}$$

U_i:يمثل متغير عشوائي مستمر يتم توليده باستخدام الحاسبة الالكترونية وفقاً للصيغة $U = Rand$.

ب- تحويل البيانات المولدة في الخطوة (أ)والتي تتبع التوزيع المنتظم إلى بيانات تتبع توزيع ويبل، و باستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل المعكوس ينتج:

$$F(x;\lambda,\theta) = 1 - e^{-x_i^{\lambda}/\theta} \qquad \text{.....................(45)}$$

ومن ثم فان:

$$U = 1 - e^{-x_i^{\lambda}/\theta}$$ ....(46)

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة ينتج:

$$x = (-\theta \log(1-U))^{1/\lambda}$$ ....(47)

ج- في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع ويبل ولكافة الطرائق المبينة سابقاً وبالاعتماد على (x_i) المولدة في الخطوة (ب) ولغرض الوصول للمقدارالأفضل فقد تم الاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) كأساس للمقارنة والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{L}(\hat{\theta} - \theta)^2}{L}$$ ....(48)

ولحجم مكرر(L=1000) وبالاعتماد على البرنامج الذي تم كتابته باستخدام تطبيق(MATLAB-R2010a) الحديث، فان الجداول من رقم (2) تبين نتائج هذه البحث.

الاستنتاجات:

من الجدول رقم (2) تبين الأتي:

1- أظهرت نتائج المحاكاة بان الطريقة(Minimax) المعتمدة على دالة الخسارة التربيعية (MOM) كانت أفضل وأكفاء طريقة لأنها حققت اقل(MSE) لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث .

2- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة الإمكان الأعظم (MLE) والطريقة(Minimax) المعتمدة على دالة خسارة (Mlinex) كانت ثاني وثالث أفضل وأكفاء طريقة على التوالي تقريبا لأنها حققت ثاني وثالث اقل(MSE) لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث .

3- أظهرت نتائج المحاكاة إن طريقة المربعات الصغرى كانت أسوء طريقة لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث.

4- كانت قيم(MSE) تتناقص مع ازدياد حجم العينة ولجميع الحالات وهذا يتطابق مع النظرية الإحصائية، مما يؤكد صحة الجانب النظري من هذا البحث حول سلوك هذه الدالة.

التوصيات:

1- يمكن اعتماد طريقة (Minimax) المعتمدة على دالة الخسارة التربيعية (MOM) في البحوث التي تتطلب تقدير معلمة القياس لتوزيع ويبل .

2- يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل حالة تقدير المعلمتين ودالة المعولية وفي حالة البيانات تحت المراقبة وبشكل مفصل .

جدول رقم (2)

يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة

	n	MLE	MOM	Mlinex	OLS	ترتيب افضلية الطرائق			
						MLE	Mom	Mlinex	OLS
1	10	0.023688713	0.018290155	0.026248311	2.115049449	2	1	3	4
	25	0.009832721	0.008838716	0.010311517	1.763197511	2	1	3	4
	50	0.005080701	0.004826324	0.005243936	1.662185921	2	1	3	4
	100	0.002479256	0.002424861	0.002547903	1.639830038	2	1	3	4
2	10	0.025482207	0.019705309	0.045288115	2.138076696	2	1	3	4
	25	0.00935068	0.008361355	0.012048494	1.784714759	2	1	3	4
	50	0.00563829	0.005326421	0.006326742	1.701639488	2	1	3	4
	100	0.002449906	0.0023756	0.002588204	1.625461547	2	1	3	4
3	10	0.025098879	0.025073695	0.040586564	2.02643238	2	1	3	4

	25	0.011368575	0.011610302	0.014634889	1.795016257	1	2	3	4
	50	0.004521848	0.00447139	0.005087907	1.683101429	2	1	3	4
	100	0.002354233	0.002361558	0.002532429	1.671334433	1	2	3	4
4	10	0.024283435	0.024323425	0.065768029	2.155908481	1	2	3	4
	25	0.01005268	0.009916699	0.016280995	1.723017246	2	1	3	4
	50	0.005308766	0.005286396	0.006926766	1.693707478	2	1	3	4
	100	0.002330794	0.002307664	0.002670993	1.634901141	2	1	3	4
5	10	0.100804227	0.079108966	0.092505076	0.563506929	3	1	2	4
	25	0.0402237	0.035855696	0.039369416	0.53707622	3	1	2	4
	50	0.01923546	0.0183717	0.018802454	0.542439162	3	1	2	4
	100	0.010139398	0.009881879	0.010047511	0.575720033	3	1	2	4
6	10	0.101401681	0.078228221	0.138765937	0.561634215	2	1	3	4
	25	0.040419277	0.036315911	0.045880295	0.559142429	2	1	3	4
	50	0.021516125	0.020287604	0.023155946	0.559633774	2	1	3	4
	100	0.009765245	0.009522659	0.010029582	0.575212246	2	1	3	4
7	10	0.096749498	0.067187151	0.087904958	0.514837598	3	1	2	4
	25	0.040132092	0.0344068	0.03810743	0.530393126	3	1	2	4
	50	0.020906777	0.019329491	0.020338937	0.563027559	3	1	2	4
	100	0.009971481	0.009584276	0.009829826	0.574706199	3	1	2	4
8	10	0.107172761	0.074425528	0.158300565	0.534696133	2	1	3	4
	25	0.040471351	0.034697661	0.045438592	0.541072986	2	1	3	4
	50	0.020872024	0.01929736	0.021736176	0.566774756	2	1	3	4
	100	0.010401075	0.009997188	0.010764802	0.574972438	2	1	3	4
9	10	0.026101673	0.020203372	0.023721111	2.047057568	3	1	2	4
	25	0.009910893	0.008966032	0.009657823	1.749599806	3	1	2	4
	50	0.005086121	0.004833675	0.005018306	1.661190964	3	1	2	4
	100	0.002658895	0.002591914	0.002641167	1.62501702	3	1	2	4
10	10	0.026058976	0.020450567	0.063095236	2.114885274	2	1	3	4
	25	0.010331634	0.009295416	0.015219774	1.771795807	2	1	3	4
	50	0.005081018	0.004814005	0.006237127	1.670348988	2	1	3	4
	100	0.002509672	0.002438262	0.002766185	1.62972279	2	1	3	4
11	10	0.025596941	0.024899355	0.031577453	2.518217619	2	1	3	4
	25	0.010590186	0.010621042	0.011883764	1.764520937	1	2	3	4
	50	0.005389228	0.005389745	0.005718223	1.683605404	1	2	3	4
	100	0.002449762	0.002433863	0.002508437	1.615348075	2	1	3	4
12	10	0.027496697	0.0270139	0.090650107	2.050142041	2	1	3	4
	25	0.009561085	0.009890327	0.019295994	1.707787576	1	2	3	4
	50	0.004806957	0.004792931	0.006921046	1.636718777	1	2	3	4
	100	0.002451225	0.002487039	0.003070136	1.664468391	1	2	3	4
	n	MLE	MOM	Mlinex	OLS	ترتيب افضلية الطرائق			
						MLE	MOM	Mlinex	OLS
13	10	0.093162778	0.073557719	0.077124053	0.542925777	3	1	2	4
	25	0.039518915	0.035596779	0.036550319	0.544535005	3	1	2	4
	50	0.019053859	0.018070104	0.018315658	0.561832884	3	1	2	4
	100	0.009980872	0.009728543	0.009784408	0.577940267	3	1	2	4
14	10	0.102355957	0.078084013	0.184913279	0.546100089	2	1	3	4
	25	0.037181394	0.033394656	0.04760315	0.546476777	2	1	3	4
	50	0.018623936	0.017737306	0.020674013	0.55952656	2	1	3	4
	100	0.009803627	0.009556331	0.010344018	0.579541028	2	1	3	4
15	10	0.105679522	0.073388557	0.082470117	0.551147529	3	1	2	4
	25	0.03921135	0.033617412	0.035199263	0.543406835	3	1	2	4
	50	0.01997954	0.018472208	0.018931619	0.556105729	3	1	2	4
	100	0.010634868	0.010221903	0.010305644	0.583108937	3	1	2	4

16	10	0.100338281	0.069679362	0.177541093	0.506026349	2	1	3	4
	25	0.043411223	0.037218127	0.055852003	0.532911682	2	1	3	4
	50	0.019979952	0.018472589	0.022556525	0.565309128	2	1	3	4
	100	0.009569258	0.009197672	0.010139236	0.576631541	2	1	3	4

المصادر:-

1- Dey,S. (2008)."Minimax Estimation of the Parameter of the Rayleigh Distribution under Quadratic Loss Function", Data Science Journal, vol.7, pp.23-30.

2- Gupta, R.D.and Kundu, D.(1999)."Generalized Exponential Distribution",Australian and New Zealand Journal of Statistics, vol. 41, pp.173-188.

3- Singh,R.,Singh,S.K,Singh,U and Singh,G.P.(2008),"Bayes Estimator of Generalized Exponential Parameters under LINEX Loss Function using Lindleys Approximation",Data Science Journal ,vol.7,pp.65-75

4- Roy,M.K,Podder,C.K and Bhuiyan,K.J.(2002),"Minimax Estimation of the Scale Parameter of the Weibull Distribution for the Quadratic and MLINEX Loss Function ",Jahangirnajar University Journal of Science,vol.25,pp.277-285

ملحق رقم (1)

```
%%Program for estimation of Parameters of weibull distribution%%
rand('state',sum(100*clock));
n=100 ;
theta=1;
lemda=0.5;
elpha=1;
beta=0.5;
c=-2;
L=1000;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%
for q=1:1000
U=rand(1,n);
x=(-theta.*log(1-U)).^(1/lemda);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T=sum(x.^lemda);
theta_mle(q)=T/n;%%%%%%%%%%mle
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%
k1=(1/(n+elpha+1));
theta_mom(q)=k1*(T+1/beta);%%%%%%%%%%%%%%%%minimax_Quadrati
c
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%
k2=(gamma(n+elpha)/gamma(n+elpha+c))^(1/c);
theta_lmom(q)=k2*(T+1/beta);%%%%%%%%%%%%%%%%minimax_Linex
X=log(x);
i1=1:1:n;
F=i1./(n+1);
Y=log(-log(1-F));
b1=(X*Y'-n*mean(X)*mean(Y))/(sum(X.^2)-n*(mean(X))^2);
a1=mean(Y)-b1*mean(X);
theta_ols(q)=exp(-a1);
end
```

```
mse_mle=mean((theta_mle-theta).^2);
mse_mom=mean((theta_mom-theta).^2);
mse_lmom=mean((theta_lmom-theta).^2);
mse_ols=mean((theta_ols-theta).^2);
MSE=[mse_mle mse_mom mse_lmom mse_ols]
```