تأثيـر طرائـــق التقديــر في مقـــايـيس الاداء لأنظمـــة الطوابيـــــر (M/M/1)

أ.د. حامد سعد الشمرتي م. د. هناء سعد محمد
الجامعة المستنصرية جامعة الكوفة

الملخص

نستعرض في هذا البحث أحد التوزيعات الاحتمالية ذات الصلة بنظرية الطوابير (توزيع بواسون ،التوزيع الآسي) وطرائق التقدير لمعلماتها وهي طرائق التقدير التقليدية (Maximum Likelihood ,White) ،اما الجانب الاساسي في هذا االبحث هو الجانب التجريبي اذ كان الجانب التجريبي يتضمن توظيف اسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو (Monte Carlo) في توليد بيانات تتوزع التوزيع الاسي ، ومن ثم ايجاد مقدرات معلمة القياس لها وتحديد افضلية هذه المقدرات التي تخص توزيع ازمنة الخدمة في انظمة الطوابير (M/M/1) باستخدام احد المقاييس احصائية وهي مقياس متوسط مربعات الخطأ (MSE) من اجل بيان افضلية هذه المقدرات وذلك بالنسبة لطريقتي التقدير ولحجوم العينات وبعدة قيم افتراضية لمعلمة القياس ، من ثم ايجاد مقدرات لمقاييس الاداء بالنسبة لنظام الطوابير (M/M/1)وقد توصل الباحثان الى انه يوجد تأثير لطرائق التقدير في مقاييس الاداء اذ كانت طريقة (White) هي الافضل من اذ مقاييس الاداء.

المقدمة

ان نظرية الطوابير هي دراسة رياضية لما يسمى بخطوط الانتظار (Waiting Lines) وهذه الظاهرة شائعة في حياتنا اليومية وفي المجالات التي يحدث فيها الانتظار ونظرا لصعوبة التنبؤ بعدد الزبائن الواصلين وكذلك الوقت الذي يستغرقه الزبون في مركز الخدمة لهذا تكون عملية الحصول في مقاييس الاداء ضرورية قبل تنفيذ منظومة الطوابير ،ومن هذا المنطلق يتوجه اهتمامنا الى تناول نظرية الطوابير وكذلك معرفة تأثير طرائق التقدير التقليدية في هذه النمذجة وما توفره من مؤشرات خاصة بالنماذج (الانظمة) مثل (M/M/1) ان هذا النموذج بالنموذج البسيط ويكون توزيع اعداد الواصلين هو توزيع بواسون وتوزيع زمن الخدمة هو التوزيع الاسي ولأجل بلوغ هدف البحث قسم الى قسمين الأول: (الجانب النظري) تناول نظرية الطوابير وخصائصها واهم النماذج فيها والمبحث الثاني حول التوزيعات الاحتمالية التي تنمذج بيانات اعداد الواصلين وأزمنة الخدمة في انظمة الخدمة وكذلك طرائق التقدير لتقدير معلماتها.

اما القسم الثاني: (الجانب التجريبي) فقد اشتمل التعريف بالمحاكاة ونتائج المحاكاة وتحليل النتائج ، وأخيرا النتائج والتوصيات التي توصلت اليها الباحثة.

الاستعراض المرجعي والدراسات السابقة

هناك العديد من الدراسات والبحوث التي تناولت نماذج تقديم الخدمة ، والنماذج الخاصّة بها واستخدام طرائق التقدير الإحصائي لغرض الحصول في المقدر الأفضل لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الخاصّة بعمليّات الوصول والخدمة، نذكر منها في أدناه:

1- في عام (1982) قام الباحث (عوّاد كاظم) بدراسة نظام تنفيذ الاتصالات التلكسية باستخدام نظرية الطوابير

2- في عام (1986) قم الباحث (داود سلمان الدليمي) بتطبيق نظرية الطوابير في مستشفى الأطفال في مدينة الصدر، إذ قام بوصف النظام المعمول به (M/M/C) واستبداله بالنظام (M/M/I) من خلال دمج الطوابير بطابور واحد

3-في عام (1999) قامت الباحثة (فيفان ايليا يوحنا) بدراسة تطبيقية حول نظرية الطوابير وإمكانية تطبيقها في نظام طبع المراسلات الإدارية من خلال نموذج (M/M/C).

4-في عام (2000) قام الباحث (Al-Fawzan) بدراسة مقارنة بين مقدرات الإمكان الأعظم والعزوم لتقدير معلمتي الشكل والقياس لتوزيع ويبل، وقد توصّل الباحث إلى أن طريقة العزوم هي الأفضل ولجميع حجوم العيّنات.

5-في عام(2001) قام الباحث (عمر محمد ناصر) بدراسة استخدام نظرية الطوابير في نظام مراكز الجباية للنقد للشركة العامّة لتوزيع كهرباء بغداد.

6-في عام (2002) قام الباحث (مشتاق القيسي) بدراسة استخدام نظرية الطوابير المتقدمة في تحليل وتحسين أداء بعض مراكز الصيانة الرئيسة في الشركة العامّة لتوزيع كهرباء بغداد وإيجاد الحلول المناسبة لهذه المراكز.

7-في عام (2003) قام الباحثان (حسام البيّاتي وهاني الحديثي) بدراسة استخدام طريقة بيز في تقدير معلمات ودالّة المعوّلية للتوزيع الأسّي مع تطبيق عملي.

8-في عام (2004) قام الباحث (M. Veeraraghvan) بدراسة أنظمة الطوابير M/M/l وM/M/m وعلاقة النموذج M/M/l بسلسلة ماركوف.

وفي العام نفسه قام الباحثان (رجب عبد الله حكومة ومنصور رمضان أسبيقة) بتطبيق نظرية الطوابير في مركز خدمات بحري، اذ قاما بحساب وقت الانتظار والخدمة لثلاثة أنواع من السفن التجارية (صغيرة، متوسطة كبيرة) ومن خلال نموذج الطوابير M/M/l. أي بتقديم مركز خدمة أحادي.

9-في عام (2006) قام الباحث (زكريا محمد ديب) بدراسة حركة النقل في مطار دمشق الدولي من خلال استخدام نظرية الطوابير البسيطة لدراسة حركة الطائرات واستخدام المحاكاة في دراسة حركة المسافرين وكذلك استخدام المصفوفة الماركوفية في دراسة مركز صيانة الطائرات.

10-في العام (2007) قام الباحث (عمّار شهاب أحمد) بتطبيق نظرية الطوابير في المستشفى التعليمي لكلية طب الأسنان -جامعة بغداد في قسم جراحة الوجه والفكين بهدف تحديد النموذج الأمثل الذي يقلل من الزمن الحاصل في هذا العام.

11-في عام (2008) قام الباحثان (مهدي العلاّق وتهاني الياسري) بدراسة مقارنة لمقدرات المربعات الصغرى مع مقدرات بيز لتقدير دالّة المعوّلية التقريبية لتوزيع ويبل.

وفي العام نفسه أيضاً (Alison Corringto) باستخدام نظرية الطوابير في إيجاد أمثلية لعمل أنظمة السيطرة الشبكية اللاسلكية ولتقليل التأخير الذي يؤثّر في عمل هذه الأنظمة وكفاءتها.

الجانب النظري

نظرية الطوابير(صفوف الانتظار)

وتعد نظرية الطوابير (Queuing Theory) هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية التي تستخدم مفاهيم في حقل العمليات التصادفية. ومن الأمثلة في العمليّات التصادفية من الطوابير هي:

1) زبائن يصلون الى نظام الخدمة الى شكل عشوائي ويلتحقون بطوابير الخدمة ويغادرون النظام بعد انتهاء الخدمة، لتكن N_k هي عدد زبائن في النظام عند زمن مغادرة الزبون k بعد إكماله الخدمة. والعمليّة

العشوائية $\{N_k, k=1,2,...\}$ هي عمليّة ذات فضاء حالة ومعلمة متقطعة, وفضاء الحالة هو $I=\{0,1,2,...\}$ ، ومجموعة التأشير $T=\{1,2,...\}$.

2) لتكن $X(t)$ عدد الزبائن في النظام عند الزمن t عندئذ $\{X(t), t\in T\}$ هي عمليّة عشوائية بفضاء معلمة مستمر وفضاء حالة متقطعة، إذ أنها $I=\{0,1,2,...\}$ ، أمّا فضاء المعلمة هو $T=\{t, 0\le t<\infty\}$.

3) لتكن W_K الزمن الذي استغرقه الزبون K في الانتظار في الطابور قبل البدء بخدمته، عندئذ $\{W_K, K\in T\}$ هي عمليّة عشوائية بفضاء حالة مستمر وفضاء معلمة متقطع, أي أن فضاء الحالة هو $I=\{X\,;\,0\le x<\infty\}$ وفضاء المعلمة هو $T=\{1,2,...\}$.

4) لتكن $Y(t)$ تمثل الخدمة المطلوبة المتجمعة حتى الزمن t لكل الزبائن، عندئذ العمليّة العشوائية $\{Y(t);\,0\le t<\infty\}$ هي عملية بفضاء حالة ومعلمة مستمر، أي أن فضاء الحالة هو $I=[0,\infty)$ ، وفضاء المعلمة هو $T=\{t, 0\le t>\infty\}$.

عمليّة بواسون (Poisson Process)

وهي عمليّة اكتشفت من قبل عالم الرياضيات الفرنسي سيمون دينيس بواسون (Simeon –Denis Poisson) 1781-1840 وهي عمليّة ولادة نقية (Pure Birth Process)[5].

ان عمليّة العد *N(t)* تكون عمليّة بواسون بمعدل λ اذا حققت الشروط:

(1) العمليّة لها زيادات مستقلة Independent Increments.

(2) العمليّة لها زيادات ثابتة Stationary Increments.

(3) $$P\left\{\left[N(t+\Delta t)-N(t)\right]\begin{pmatrix}=0\\=1\\>1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1-\lambda\Delta t\\ \lambda\Delta t\\ 0\end{pmatrix}$$

اذ أن المعدل λ يمثل العدد المتوقع من الزبائن الذين يصلون في وحدة زمنية.

إن التوزيع البواسوني (Poisson Distribution) هو توزيع احتمالي متقطع وهو يظهر الاحتمال $P(n,\lambda)$ اذ أن n هي عدد الحوادث التي تحدث فيمدة زمنية ثابتة، إذا هذه الحوادث تحدث بنسبة معدل λ وهي مستقلة عن الزمن منذ الحادثة الأخيرة، والتوزيع يعطي بالعلاقة:

$$P[N(t)=n]=\frac{(\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}\qquad n=0,1,....$$

وبافتراض أن زمن الوصول البيني (Interarrival Time) موصوف بالتوزيع الأسي بالمعلمة λ وزمن الخدمة (Service Time) موصوف بالتوزيع الأسي بالمعلمة μ، فإنّ السلوك الانتقالي لنظام الطوابير هو واضح من خلال:

$$P_n^{/}(t)=\lambda P_{n-1}(t)+(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t)$$

اذ ان $P_n^{/}(t)$ هو المشتقة لـ $P_n(t)$ اذ الاحتمال بأن يكون النظام في الحالة n عند الزمن t.

خاصية فقدان الذاكرة (الخاصية الماركوفية)(Memoryless Property) (Markovian Property)

يقال عن متغير عشوائي انه عديم الذاكرة أو له الخاصية الماركوفية من الدرجة الأولى إذا كان الزمن حتى الحادث القادم لا يعتمد في كم من الوقت مر منذ الحادث الأخير. وبشكل رياضي: يكون متغير عشوائي عديم الذاكرة أو الخاصية الماركوفية من الدرجة الأولى إذا تحقق:

$$P[X > s+t | X > t] = p[X > s] \qquad \text{for all} \qquad s,t \geq 0$$

أزمنة الوصول البيني لها خاصية فقدان الذاكرة، أو لها الخاصية الماركوفية من الدرجة الأولى، إذا كانت عمليّة الوصول هي عمليّة بواسون.

خصائص نظرية الطوابير

إن العمل الأساسي لأغلب أنظمة الطوابير يضمن وصول الزبائن الى نظام الطابور لاستلام الخدمة، وإذا كانت قنوات الخدمة مشغولة فإنّ الزبائن ينضمون الى خطوط الانتظار، أو بمعنى آخر فأنّه ينتظر في الطابور، ومن ثم يتم تقديم الخدمة لهم وفقاً لأسلوب معيّن يضعه نظام الخدمة ومن ثم يغادرون النظام. لذلك فإنّ خصائص نظرية الطوابير موصوفة من خلال ما يأتي:[(6)]

1- عمليّة الوصول (The Arrival Process)

وهنا يتم وصف طريقة وصول الزبائن (الوحدات) الى الطابور, فقد تأتي من مصدر محدود (Finite Source) أو يحتوي في عدد منتهي من الوحدات أو تأتي من مصدر لا نهائي (Infinite Source) . وقد تأتي هذه الوحدات فرادى، أو في شكل مجموعات (Batches) ثابتة (Fixed) أو حجم عشوائي (Random Size)، كما أن الفترات الزمنية التي تفصل بين وصول الوحدات وهو ما يسمى بأوقات الوصول البيني(Interarrival Times) قد تكون ثابتة أو متغيرة ولها توزيع احتمالي.[(6)]

ومن أكثر التوزيعات الاحتمالية شيوعاً التي تصف عمليّة الوصول هو التوزيع الاحتمالي المتقطع توزيع بواسون (Poisson Distribution) وذلك لملائمته، كون أن الزبائن يصلون من عدد كبير لمصادر مستقلة وهذا يدل في أن الأوقات الوصول البينية هي موزعة للتوزيع الاحتمالي المستمر التوزيع الأسي (Exponential Distribution)، ويكون بذلك مقدّم خاصية فقدان الذاكرة الى النموذج، وهذا يعني بأن التوزيع الاحتمالي للزمن حتى الوصول القادم هو مستقل عن الوصول الأخير.

إن التوزيع الآسي يلعب دوراً مركزياً في نظرية الطوابير، فضلاً عن كونه واقعياً بما فيه الكفاية، اذ يبسط التحليل الى حد كبير لأنظمة الطوابير اذ تُمَيّزه بخاصية فقدان الذاكرة.

2- عمليّة الخدمة The Service Process

وهنا يتم وصف طريقة خدمة الوحدات التي تصل الى الطابور فقد تخدم الوحدات الواحدة تلو الأخرى أو في مجموعات ثابتة أو متغيرة، كما يمكن أن تخدم هذه الوحدات بواسطة مقدم خدمة واحد أو أكثر. إذ أن الفترات الزمنية التي تستغرق في خدمة الوحدات قد تكون ثابتة أو متغيرة، ولها توزيع احتمالي، وتقاس عمليّة الخدمة بمعدل عدد الزبائن اللذين تتم خدمتهم خلال مدة زمنية معينة أو بمعدل طول المدة الزمنية المطلوبة لخدمة زبون واحد، وإن محطة الخدمة يجب أن تكون ملائمة للتعامل مع الزبائن طالبي الخدمة، اذ يجب أن يكون معدّل الخدمة في الأقل مساوياً لمعدل الوصول، وبخلافه فإنّ عدد الزبائن المنتظرين سيكون كبيراً جداً.[(1)]

ومن التوزيعات الاحتمالية التي تأخذها أوقات الخدمة والاكثر أهمية هما التوزيع الاسي (Exponential Distribution) وتوزيع ايرلانج (Erlang Distribution)، فأنّه إذا احتمال حدوث حادثة واحدة في أثناء

مدة زمنية صغيرة Δt، وإن حدوث هذه الحادثة هو مستقل عن الحوادث الأخرى، فإنّ الزمن بين الحوادث هو موزع أسيّاً، وبطريقة أخرى للقول انه إذا كان زمن الخدمة مستمراً لوحدات الزمن t، والاحتمال بأنه سينتهي في الوحدة الزمنية القادمة Δt هو نفسه تماماً مثل ما إذا كان عندما بدأ.

3- نظام الطابور The Queuing Discipline

إن نظام الطابور هو يصف الطريقة التي يستخدمها مقدم الخدمة لخدمة الزبائن في الطابور, وهناك أربعة قواعد للخدمة وهي:

أ- من يأتي اولا يُخدم أولا FCFS (First Come –First Served)

وتسمى هذه بالطريقة العادلة أو المنصفة، والأمثلة كثيرة لنظام الخدمة هذه اذ انها الاكثر شيوعا ويتم خدمة الزبائن تبعاً لترتيب أو أولوية وصولهم، ويرمز لهذه الطريقة أيضا بالرمز FIFO (First In First Out).

ب – من يأتي أخيراً يُخدم أولاً: LCFS (Last Come- First Served)

وهذا نوع من نظام الخدمة نجده واضحاً في ما يحدث في المخازن، اذ تكدس المواد في المخزن، وتُصرف من المخزن بعكس الترتيب الذي وضعت فيه هذه المواد، من ثم فإنّ الخدمة تتم تبعا للترتيب العكسي لوصول الزبائن .

ج – نظام الخدمة العشوائي SIRO (Service In Random Order)

وهذه الحالة نادرة الحدوث ويمكن ملاحظتها في حالة اختلال النظام في عمليّة الوصول الى مراكز تقديم الخدمة.

د – نظام الخدمة حسب الاسبقية (Service With Priority)

وفي هذه الحالة يتم اختيار الزبون الذي ستقدم له الخدمة في وفق أهمية أو دور متميز يضعه نظام الخدمة أو في وفق درجة معينة من الخطورة كما يحدث ذلك في المستشفيات في الحالات الطارئة إذ أن المريض تتم معالجته بأسبقية في المرضى الباقين.

4- سعة النظام (System Capacity)

ويسمى أيضاً بغرفة الانتظار (The Waiting Room) وقد تكون سعة النظام في نوعين:

– محدود (نهائي) Finite: وهنا الزبون الذي يجد ان النظام مملوء عند وصوله فأنّه لا يستطيع الانضمام اليه فيغادره.

– غير محدود (لا نهائي) Infinite: إذا كان العدد الأفقي الممكن للزبائن كبير نسبياً، فأنّ سعة النظام يفترض أن تكون غير محدودة, وهي الفرضية الأكثر شيوعاً في أنظمة الطوابير.

ترقيم كندال The Kendall Notation

اقترح كندال (Kendall) عام(1951) معيار ترقيم أو تصنيفا هاما اذ يصف كل الخصائص لنظام الطوابير الأساسية, ولترقيم له ستة خصائص وهي كما يأتي:[(2)]

1/2/3/4/5/6

خاصية 1: تحدد طبيعة عمليّة الوصول, وتستعمل فيها المختصرات الآتية:

M: أوقات الوصول البينية (Interarrival Times) وهي متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة بالتوزيع (iid) وتتوزع توزيع أسي.

D: أوقات الوصول البينية وهي (iid) وتكون ثابتة أي انها تتوزع توزيع قطعي ومحدد (Deterministic Distribution)

E_k : أوقات الوصول البينية وهي (iid) وموزعة توزيع ايرلانج بمعلمة الشكل K وهنا تمثل الأطوار الأطوار التي تمر بها.

C_k : أوقات الوصول البينية وهي (iid) وموزعة توزيع كوكسيان بمعلمة الشكل K.

GI : أوقات الوصول البينية وهي (iid) وتولدت عن طريق توزيع عام .

خاصية 2: تحدد طبيعة عمليّة الخدمة, وتستعمل فيها المختصرات الواردة في خاصية 1.

خاصية 3: فإنّها تحدد عدد قنوات الخدمة المتوازية

الخاصية 4: فإنّها تصف أحدى قواعد تقديم الخدمة في الطابور.

خاصية 5: تحدد الحد الأفي للزبائن المسموح لهم في النظام.

خاصية 6: فأنّها تعطي حجم الموارد المتعلقة بالدخول الى النظام.

الوصول البواسوني Poisson Arrivals

إن أغلب أنظمة الطوابير تفترض عملية الوصول هي وصول بواسوني، وهذه الفرضية هي تقريب جيد جدا لعمليّة الوصول في الأنظمة الحقيقية والتي تقابل القواعد الآتية:

1- إن عدد الزبائن في النظام كبير جداً.

2- تأثير زبون واحد في أداء النظام صغير جداً، وبمعنى آخر، أن زبون واحد يستهلك نسبة مئوية صغيرة جداً من موارد النظام .

3- كل الزبائن مستقلون، أي أن قرارهم لاستخدام النظام مستقل عن استخدامات الآخرين.

من ثم فإنّ كل هذه القواعد أعلاه إذا لم تكن مجتمعة، فنحن لا نستطيع افتراض بأنّ وصول الزبائن هو بواسوني.

وتستند نظرية الطوابير في عدد من الفروض والتي يمكن توضيحها بالصيغ الرياضية الآتية:

L_s: متوسط الوحدات طالبة الخدمة في النظام.

L_q: متوسط عدد الوحدات طالبة الخدمة في الطابور.

W_s: متوسط الزمن المستغرق في النظام.

W_q: متوسط الزمن المستغرق في الطابور

λ : معدل الوصول (عبارة عن عدد الوحدات الخارجة الى النظام في وحدة الزمن)

μ : معدل أداء الخدمة (عبارة عن عدد الوحدات الخارجة من النظام في فرض انها تلقّت الخدمة المقررة لها في وحدة الزمن).

ρ : هي نسبة الاستخدام أو معدل الوصول للوحدات في وحدة الزمن الى معدل اداء الخدمة في وحدة الزمن.

n: عبارة عن عدد الوحدات في النظام في المدة t (وتكون مقاسة بوحدات الزمن مثل: ساعات – أيام – أشهر ....الخ)

Δt : مدة زمنية صغيرة جدا

$P_n(t)$: احتمال وجود n من الوحدات في النظام من الزمن t

التوزيع الأسّي (Exponential Distribution)

في النظرية الإحصائية يكون التوزيع الأسي وهو من عائلة التوزيعات الاحتمالية المستمرة، إذ يصف الزمن بين الحوادث في العملية البواسونية (Poisson Process)، بمعنى أن العملية التي تحدث فيها الحوادث بشكل مستمر ومستقل بنسبة ثابتة (Constant average rate)، كما نلاحظ أن العائلة الأسية للتوزيعات هي نوع كبير لتوزيعات الاحتمالية التي تتضمن التوزيع الأسي كواحد من أعضائها، فضلاً عن التوزيع الطبيعي، وتوزيع كاما وتوزيع بواسون وغيرهم من التوزيعات.

إن دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) للتوزيع الأسي هي:

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

اذ أن $\lambda>0$ وهي معلمة التوزيع وعادة تسمى بمعلمة النسبة (Parameter rate)، وإن التوزيع متمثّل في المدة $[0,\infty)$.

أمّا دالة التوزيع التجميعية (cdf) فهي:

$$F(x;\lambda)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

الخصائص Properties

إن المتوسط أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x والذي يتوزع توزيعاً أسّياً بمعلمة النسبة λ هي:

$$E[X]=\frac{1}{\lambda}$$

أما التباين فهو:

$$Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}$$

والوسيط هو:

$$m[X]=\frac{Ln2}{\lambda}<E[X]$$

كما يمتلك التوزيع الأسي دالة معولية وهي:

$$\begin{aligned}R(x)&=1-F(x)\\ &=1-\int_0^{\infty} f(x)dx\\ &=1-\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx\\ R(x)&=e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

طرائق التقدير Estimation Methods

هنا سيتم تناول عدد من الطرائق التقديرية التي تعتمد في افتراض بأن المعلمة المراد تقديرها هي ثابتة، وتسمى هذه الطرائق بالطرائق التقليدية (الكلاسيكية)، ومن هذه الطرائق التي يتم تناولها في هذا المبحث ما يأتي:

1- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method

تعد طريقة الإمكان الأعظم إحدى أهم طرائق التقدير، ومن وجهة نظر إحصائية تعد طريقة الإمكان الأعظم أكثر قوة (مع بعض الاستثناءات) والمقدرات الناتجة تكون بخصائص إحصائية جيّدة، وبعبارة أخرى، فإنّها متعددة الاستخدام وتطبّق في معظم النماذج وأنواع مختلفة من البيانات، فضلاً عن ذلك فإنّها توفّر وسائل فعّالة لقياس عدم اليقين (عدم التأكّد) من خلال حدود الثقة. إن مبدأ طريقة الإمكان الأعظم يكمن في إيجاد تقدير $\hat{\theta}$ للمعلمة θ الذي يجعل من دالة الإمكان (Likelihood Function) في نهايتها العظمى، فإذا كان $\hat{\theta}$ دالة بدلالة قياسات العينة التي تجعل L في نهايتها العظمى عندئذ يقال أن $\hat{\theta}$هو مقدر الإمكان الأعظم إلى المعلمة θ، وهذا يعني أن $\hat{\theta}$ ناتج من خلال حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

بشرط أن:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

وبهدف السهولة في إجراء عمليات التفاضل أعلاه فإنّه غالباً ما يتم التعامل مع Log L، إذ أن L>0 فإن:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{مكافئة إلى} \quad \frac{\partial LogL}{\partial \theta} = 0$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{\partial LogL}{\partial \theta} = \frac{1}{L} * \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

علماً بأن مبدأ هذه الطريقة يمكن تطبيقه في التوزيعات متعددة المتغيرات والتوزيعات ذات المتغير الواحد.

ولتقدير معلمة التوزيع الأسي بهذه الطريقة، فإنّه أولاً نحصل في دالة الإمكان:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x_1, x_2, ..., x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الجانبين:

$$LnL(\lambda; x_i) = nLn(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ومن ثم نحصل في $\frac{\partial LnL}{\partial \lambda}$ ونجعلها مساوية إلى الصفر:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

فإنه نحصل في المقدر $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

2- طريقة وايت **White's Method**

تعتمد هذه الطريقة وبصورة أساسية في صياغة نموذج انحدار خطي بسيط، وإن تطبيق هذه الطريقة يعتمد في دالة المعوّلية للتوزيع المراد تقدير معلماته، ومن خصائص هذه الطريقة إمكانية استخدام مقدّراتها بصفتها مقدرات أولية لطرائق تقدير أخرى.

ولتقدير معلمة التوزيع الأسي، نأخذ دالة المعولية وهي:

$$R(x) = e^{-\lambda x}$$

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الجانبين نحصل في:

$$Ln\,R(x) = -\lambda x$$

ويتشبيه الصيغة أعلاه بنموذج انحدار خطي بسيط، وبما أن التوزيع هو ذو معلمة واحدة، فإن معادلة الانحدار تصبح:

$$Y = bx$$

اذ أن:

$$Y = LnR(x)$$
$$b = \lambda$$
$$\lambda = -b$$

ويمكن أن يكون المقدر b من الصيغة الآتية:

$$b = \frac{n\sum xiyi - \sum xi \sum xi}{n\sum xi^2 - (\sum xi)^2}$$

مقاييس الاداء لنظام M/M/I

هنا من الضروري أن يكون معدّل متوسط الخدمة أكبر من معدّل الوصول أي ($\mu > \lambda$)، وهو أحد الفروض المصاحبة لهذا النظام.

نفترض بأنّ:

λ = **متوسط عدد العاملين في وحدة الزمن.**

μ = **متوسط عدد الحاصلين في الخدمة في وحدة الزمن.**

وفيما يلي معادلات مقاييس الأداء لهذا النظام:

1- **متوسط الاستخدام في النظام.**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

2- **متوسط عدد الزبائن الذين ينتظرون في الصف لتلقّي الخدمة.**

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

3- **متوسط عدد الزبائن في النظام.**

$$L_s = L_q + \rho$$

4- **متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون في الانتظار في الصف لتلقي الخدمة.**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5- متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون في النظام (سواء في الطابور أو في أثناء تلقي الخدمة).

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

الجانب التطبيقي

ما المحاكاة؟

إن أسلوب المحاكاة يُعطي معلومات مفيدة عن الواقع الحالي الذي يقلده، فضلاً عن تكرار التجربة، إذ أن المدخلات المتغيرة في كل مرّة تُعطي شرحاً وافياً لطبيعة العملية الرياضية المستخدمة، وعليه فإن مرونة عملية المحاكاة في دراسة مسائل مختلفة تعطي القدرة في التجريب وإجراء التعديلات من أجل استثمار الوقت والمال والجهود المبذولة.

إن من فوائد المحاكاة هي العشوائية، وتكون الفائدة العِلمية من هذه العملية هي أننا نستطيع الحصول في متغيرات عشوائية من أي توزيع إحصائي وذلك باستخدام وسائل رياضية لتحويل هذه الأرقام العشوائية إلى متغيرات عشوائية من التوزيع الإحصائي قيد الدراسة.

ومن أهم طرائق المحاكاة وأكثرها شيوعاً في التحليل هي طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) والتي تستخدم في توليد مشاهدات لمعظم التوزيعات الاحتمالية المعروفة، كما أنّها تأخذ عدداً كبيراً من العيّنات التي يُفترض أن تكون فيها المشاهدات مستقلة، وكذلك تُعني هذه الطريقة بتقليل التباين[4].

توليد الأعداد العشوائية

إن آلية طريقة مونت كارلو هي كالآتي:

1- توليد الأعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم المستمر في المدة (0,1) من خلال استخدام دالّة الكثافة التجميعية التي تصف النموذج.

2- استخدام أسلوب رياضي إحصائي وبطريقة معيّنة لتحويل العدد العشوائي المنتظم الذي تمّ توليده للحصول في المتغير العشوائي الذي يصف النموذج ويتّبع توزيعاً إحصائيّاً معيّناً.

وسيتم اعتماد طريقة المعكوس لسهولتها وكفاءتها، وكالآتي:

$$R = F(x)$$

$$x = F^{-1}(R)$$

إذ أن (R) يمثل المتغير العشوائي المنتظم، ويتولد باستخدام الحاسوب من خلال الدالة الآتية:

R=RND

صياغة نموذج المحاكاة[3]

تعتمد صياغة نموذج المحاكاة في أربعة مراحل مهمة وأساسية في تقدير معلمة توزيع زمن الخدمة لأنظمة صفوف الإنتظار (التوزيع الأسي)، وكذلك لتقدير مقاييس لأداء لهذه الانظمة، وكما يأتي:

المرحلة الأولى: (مرحلة تعيين القيم الافتراضية)

تُعد هذه المرحلة من المراحل المهمة والأساسية التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة، إذ يتم تعيين القيم الافتراضية (الحقيقية)، وكالآتي:

أولاً: تحديد حجم العينة (n)

تمّ اختيار حجوم مختلفة للعينة وبشكل يتناسب مع معرفة مدى تأثير حجم العينة في دقّة وكفاءة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير المستخدمة في هذا البحث، فتّم اختيار ثلاثة حجوم وهي (n= 50, 100, 150).

ثانياً: تحديد قيم المعلمة (λ)

تمّ تعيين قيم افتراضية لمعلمتي التوزيع الأسّي وتوزيع ريلي، إذ أُخِذَت لمعلمة القياس للتوزيع الأسّي ثلاث قيم وهي ($\lambda = 0.5, 1, 1.5$)

ثالثاً: تحديد حجم تكرار العينات(L)

تمّ اختيار حجم تكرار هذه التجارب مساوياً إلى (L=1000) مرّة لكل تجربة.

رابعاً: تحديد قيم الثوابت (λ)

بالنسبة لقيم الثوابت الواردة في الجانب النظري، فقد تمّ اختيار قيمة معدل الوصول لأنظمة الطوابير ($\lambda = 0.23$)

المرحلة الثانية: (مرحلة توليد البيانات)

لتوليد بيانات عشوائية تتبع التوزيع الأسي ذو المعلمة الواحدة ، تم استخدام طريقة التحويل المعكوس وذلك بتعويض صيغة الدالة التجميعية للتوزيع في الصيغة ادناه، وفيما يلي اشتقاق توليد هذه البيانات:

$$R = F(x)$$

وبالنسبة للتوزيع الأسي فإنّه:

$$R = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - R$$

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة نحصل في:

$$-\lambda x = \ln(1-R)$$

$$\therefore X = \frac{-\ln(1-R)}{\lambda}$$

ومن خلال الصيغة أعلاه يتم توليد بيانات تتبع (التوزيع الأسي).

المرحلة الثالثة: (مرحلة إيجاد المقدرات)

يتم في هذه المرحلة تقدير معلمة توزيع زمن الخدمة لنظام الطوابير (M/M/1) وتقدير مقاييس الأداء له، وذلك من خلال طرائق التقدير المبينة في الجانب النظري.

المرحلة الرابعة: (مرحلة المقارنة)

بعد إيجاد المقدرات يتم مقارنتها مع بعضها باستخدام المقياس الاحصائي وهو:

1- متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error

$$MSE(\hat{\lambda}) = \frac{\sum_{i=1}^{L} (\hat{\lambda}_i - \lambda)^2}{L}$$

اذ أن:

L: تمثل عدد التكرارات (Replication) لكل تجربة i=1,2,....L

$\hat{\lambda}_i$ **: مقدّر معلمة التوزيع وحسب الأسلوب المستخدم في التقدير.**

برنامج المحاكاة

لقد تم إعداد برنامج من قبل الباحثان بلغة (Minitab)، إذ استحصل منه في نتائج المحاكاة والمتمثلة بقيم المقاييس الإحصائية لمقدر معلمة توزيع زمن الخدمة في نظام الطوابير (M/M/1).

تحليل نتائج تجارب المحاكاة

يتم هنا عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لإيجاد أفضل مقدر لمعلمة توزيع زمن الخدمة في نظام الطوابير ومقاييس الأداء لها والمشار إليها سابقاً في الجانب النظري وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول.

جدول (1)

قيم معلمة القياس للتوزيع الأسّي حسب طرائق التقدير المستخدمة وبحسب حجوم العيّنات وبعدد مكررات (L=1000)

N	Parameter	MLE	White
50	0.5	1.95372	0.50621
	1	1.00946	1.0021
	1.5	0.66399	1.5009
100	0.5	1.96379	0.50031
	1	1.00659	1.00197
	1.5	0.670117	1.5002
150	0.5	1.98692	0.50004
	1	1.00531	1.00081
	1.5	0.669556	1.500

من خلال النتائج المبينة في الجدول (1) نلاحظ ما يأتي:

1- كانت أفضلية طريقة (White) وبنسبة 100% في الطرائق الأخرى عند جميع حجوم العيّنات من خلال اقتراب القيم التقريبية لمعلمة القياس في التوزيع الأسّي إلى القيم الافتراضية لها.

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية لطرائق التقدير كما في الجدول (2).

جدول (2)

أفضلية طرائق التقدير لمعلمة القياس للتوزيع الأسّي من خلال اقتراب القيمة التقديرية من القيمة الافتراضية

طرائق التقدير	عدد مرات الأفضلية
White	15
MLE	0

جدول (3)قيم مقاييس الاداء لنظام طوابير (M/M/1) وذلك بحسب طريقة (MLE) في تقدير معلمة توزيع زمن الخدمة (التوزيع الأسّي)

N	Parameter	ρ	L_q	L_s	W_q	Ws
50	0.5	0.11772	0.01571	0.13343	0.068296	0.58014
	1	0.22784	0.06723	0.29507	0.29231	1.28293
	1.5	0.34638	0.18357	0.52995	0.79813	2.30416
100	0.5	0.11712	0.01553	0.13265	0.06755	0.57677
	1	0.22849	0.06767	0.29616	0.29423	1.28769
	1.5	0.34322	0.17936	0.52258	0.77985	2.27212
150	0.5	0.115757	0.0151539	0.130911	0.0658867	0.569179
	1	0.228786	0.0678707	0.296656	0.295090	1.28981
	1.5	0.343511	0.179744	0.523255	0.781495	2.27502

جدول (4)قيم مقاييس الاداء لنظام طوابير (M/M/1) وذلك بحسب طريقة (White) في تقدير معلمة توزيع زمن الخدمة (التوزيع الأسّي)

N	Parameter	ρ	L_q	L_s	W_q	Ws
	0.5	0.4543	0.37834	0.83264	1.64495	3.62041
50	1	0.22952	0.06871	0.29823	0.29873	1.29663
	1.5	0.15324	0.02773	0.18097	0.12056	0.78682
	0.5	0.45971	0.39116	0.85087	1.70069	3.69945
100	1	0.22754	0.06739	0.29593	0.29420	1.28537
	1.5	0.15331	0.01776	0.18107	0.120695	0.78726
	0.5	0.45996	0.39176	0.85172	1.703304	3.70314
150	1	0.22981	0.06857	0.29838	0.29813	1.29732
	1.5	0.15333	0.02777	0.1811	0.12073	0.78739

من خلال النتائج المبينة في الجدولين (3) و(4) نلاحظ ما يأتي:

1- **عند حجم العينة N=50 تكون طريقة MLE قد أعطت مقاييس أداء أفضل من طريقة White ولجميع القيم الافتراضية للمعلمة (λ).**

2- **عند حجم العينة (n=100) تكون طريقة White قد أعطت مقاييس أداء أفضل من طريقة MLE وللقيم الافتراضية ($\lambda = 1,1.5$).**

3- **عند حجم العينة (n=150) تكون طريقة MLE قد أعطت مقاييس أداء أفضل من طريقة White وللقيم الافتراضية ($\lambda = 0.5,1$).**

الاستنتاجات Conclusion

1- **هناك تأثير لطرائق التقدير في تقدير مقاييس الأداء بالنسبة لنظام الطوابير M/M/1.**

2- **إن مقاييس الأداء وبحسب طريقة (White) كانت هي الأفضل وذلك حسب نظام الطوابير (M/M/1).**

3- **من خلال تجارب المحاكاة تبيّن أفضلية طريقة White باستخدام المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE).**

التوصيات

1- **توسيع استخدام طرائق التقدير التقليدية والبيزية لنماذج الطوابير لمعرفة تأثيرها في النمذجة الأمثلية من خلال بناء تجارب المحاكاة.**

2- **ضرورة الاهتمام بزيادة حجم العينة في الجوانب التجريبية والتطبيقية، لأنّ بزيادتها تتناقص قيم المقاييس الإحصائية وتعطي نتائج أفضل ما يمكن.**

3- **يعد مقياس (MSE) من أهم المقاييس الإحصائية للمفاضلة بين طرائق التقدير.**

المصادر:

1- **القيسي، مشتاق طالب، "استخدام نظرية صفوف الانتظار المتقدمة في تحليل وتحسين أداء بعض مراكز الصيانة الرئيسية في الشركة العامة لتوزيع كهرباء بغداد"، جامعة بغداد/كلية الإدارة والاقتصاد، رسالة ماجستير، 2002.**

2- **بودريسة، نعيمة، "استخدام نظرية صفوف الانتظار لدراسة مشكلة الاكتظاظ بميناء الجزائر"، الجامعة المستنصرية/كلية الإدارة والاقتصاد، رسالة ماجستير، 2002.**

3- **Naylor T. M., and et. al, "Computer Simulation Techniques", New York, John Wiley & Sons, 1971**

4- **Payne J. A., "Introduction to Simulation Programming Techniques and Methods of Analysis", New York, McGraw-Hill, Inc, (1983).**

5- **"The History of queuing Theory", Internet Exploral (yahoo), 2006.**

6- **Lotfi, T., "Waiting in line", IEEE Explorer,1995**